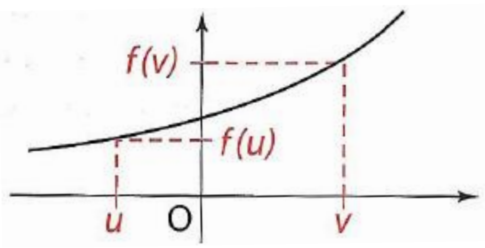
CHAPITRE 2 Étude de fonctions

1. Reconnaître le sens de variation d'une fonction

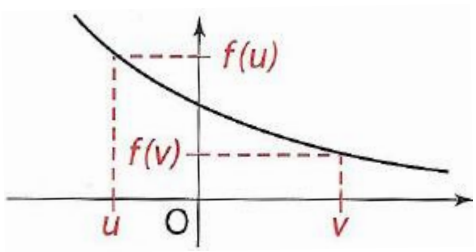
Rappels

f est une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que *f* est croissante sur I signifie que, pour tous nombres réels *u* et *v* de I,
  Si $u \leq v$, alors $f(u) \leq f(v)$.

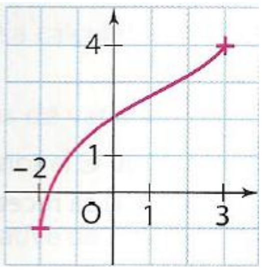


- Dire que *f* est décroissante sur I signifie que, pour tous nombres réels *u* et *v* de I,
  Si $u \leq v$, alors $f(u) \geq f(v)$.

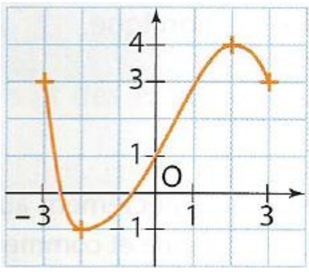


1. Dans chaque cas, dresser le tableau de variation de la fonction *f* définie sur l'intervalle I par la courbe tracée dans le repère.

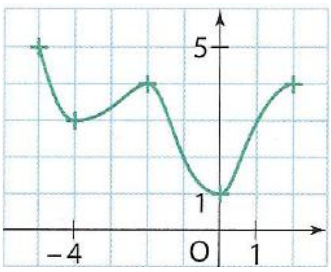
a. I = [–2; 3]



b. I = [–3; 3]



c. I = [–5; 2]



2. Connaître les fonctions affines

Rappels

- Une fonction affine est une fonction définie sur ℝ qui à chaque nombre réel x associe le nombre $a\,x + b$ où a et b sont deux nombres réels donnés.
- La fonction affine $x \mapsto a\,x + b$ est croissante sur ℝ lorsque $a > 0$, décroissante sur ℝ lorsque $a < 0$.
- Dans un repère la courbe représentative d'une fonction affine $x \mapsto a\,x + b$ est une droite *d* non parallèle à l'axe des ordonnées.

On dit que ***a*** est le **coefficient directeur** de *d* et que ***b*** est l'**ordonnée à l'origine** de *d*.

2. *f* et *g* sont les fonctions affines définies sur ℝ par $f(x) = 2\,x - 5$ et $g(x) = -3\,x + 1$.

a. Dans un repère, tracer les droites représentatives de ces deux fonctions.

b. Donner le sens de variation de *f*, puis de *g*.

3. *f* et *g* sont les fonctions affines définies sur ℝ par $f(x) = 4\,x + 3$ et $g(x) = -2\,x + 1$.

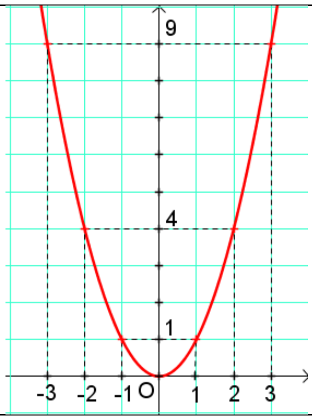
a. Dans un repère, tracer les droites représentatives de ces deux fonctions.

b. Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

3. Connaître la fonction carré

Rappels

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carré**.
- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- Dans un repère d'origine O, la courbe représentative de la fonction carré est la **parabole** de sommet O tracée ci-contre.



4. f est la fonction carré.

1. Déterminer l'image par la fonction f de :

a. 6 **b.** -7 **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $-\frac{2}{3}$ **e.** $\sqrt{11}$ **f.** $-\sqrt{3}$

2. Déterminer les antécédents éventuels par la fonction f de :

a. -4 **b.** 9 **c.** 5 **d.** $\frac{1}{4}$ **e.** 0 **f.** $\frac{5}{4}$

5. f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ par $f(x) = x^2$.

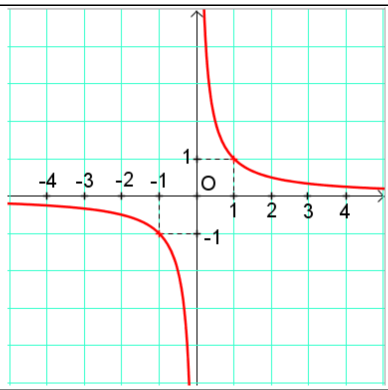
a. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées), tracer la courbe représentative de f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

4. Connaître la fonction inverse

Rappels

- La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, qui à tout nombre réel x différent de 0 associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
- Dans un repère, la courbe représentative de la fonction inverse est l'**hyperbole** tracée ci-contre.



6. *f* est la fonction inverse.
1. Déterminer l'écriture décimale de l'image par la fonction *f* de :
a. 0,25 **b.** –0,1 **c.** 8 **d.** –1 **e.** 10
2. Déterminer sous forme fractionnaire l'image par la fonction *f* de :
a. 9 **b.** –3 **c.** $\frac{7}{5}$ **d.** $-\frac{11}{6}$

7. *f* est la fonction inverse.
Déterminer l'antécédent par la fonction *f* de :
a. 0,5 **b.** –1,5 **c.** 7
d. – 6 **e.** $\frac{4}{5}$ **f.** $-\frac{7}{4}$

8. *f* est la fonction définie sur l'intervalle $[-10 ; -1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
a. Avec la calculatrice, tabuler la fonction *f* avec le pas 0,1. Arrondir au centième.
b. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm sur chaque axe), tracer la courbe représentative de la fonction *f*.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-10 ; -1]$.

9. g est la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 10]$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.
Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de g

5. Relier ordre et sens de variation

Rappels

- Deux nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
  Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
  Deux nombres réels négatifs et leurs carrés sont rangés des ordres contraires.
  Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$.
- Deux nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.
  Si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

10. Comparer mentalement les deux nombres.
a. $7{,}52^2$ et $7{,}8^2$ **b.** $(-4{,}53)^2$ et $(-4{,}2)^2$
c. $(\sqrt{2} - 1)^2$ et $(\sqrt{2} + 1)^2$ **d.** $\left(\frac{24}{7}\right)^2$ et $\left(\frac{10}{3}\right)^2$

11. Dans chaque cas, donner l'information la plus précise possible sur x^2 et justifier.
a. $-2 < x < 3$ **b.** $x \in [4 ; 10]$

12. Comparer mentalement les deux nombres.
a. $\frac{1}{2{,}57}$ et $\frac{1}{2{,}6}$ **b.** $\frac{1}{-1{,}3}$ et $\frac{1}{-1{,}4}$
c. $\frac{-1}{17{,}1}$ et $\frac{-1}{16{,}9}$ **d.** $-\frac{1}{438}$ et $-\frac{1}{439}$

13. Dans chaque cas, donner l'information la plus précise possible sur $\frac{1}{x}$ et justifier.
a. $2 < x < 8$ **b.** $x \in [-5 ; -4]$

Réponses aux exercices complémentaires

1. a.

x	-2		3
$f(x)$	-1	↗	4

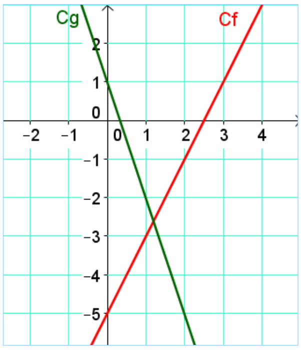
b.

x	-3		-2		2		3
$f(x)$	3	↘	-1	↗	4	↘	3

c.

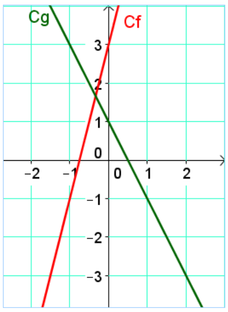
x	-5		-4		-2		0		2
$f(x)$	5	↘	3	↗	4	↘	1	↗	4

2. a.



b. f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 2$ et $2 > 0$.
g est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -3$ et $-3 < 0$.

3. a.



b. L'abscisse du point d'intersection des deux droites est solution de l'équation :

$$4x + 3 = -2x + 1$$

c'est-à-dire $6x = -2$

soit $x = -\frac{1}{3}$.

L'ordonnée de ce point d'intersection est :

$$f(-\tfrac{1}{3}) = 4(-\tfrac{1}{3}) + 3 = \tfrac{5}{3}$$

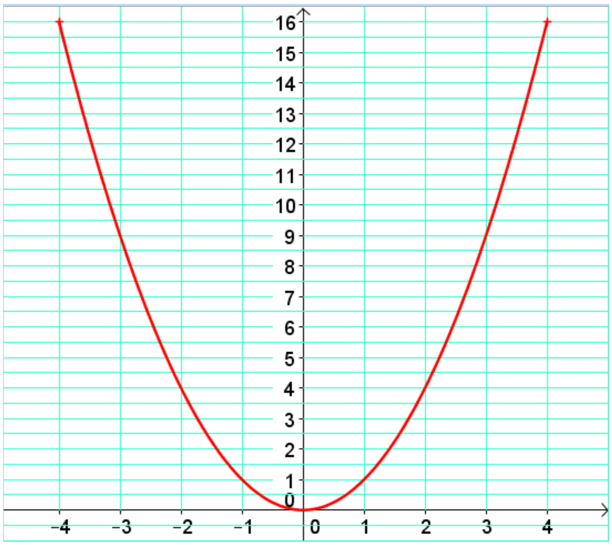
Le point d'intersection de ces deux droites a pour coordonnées $(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{3})$.

4. 1. a. 36 **b.** 49 **c.** $\frac{1}{16}$ **d.** $\frac{4}{9}$ **e.** 11 **f.** 3

2. a. Pas d'antécédent **b.** 3 et – 3

c. $\sqrt{5}$ et - $\sqrt{5}$ **d.** $\frac{1}{2}$ et - $\frac{1}{2}$ **e.** 0 **f.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et - $\frac{\sqrt{5}}{2}$

5. a.



b.

x	-4		0		4
$f(x)$	16	↘	0	↗	16

6. 1. a. 4 **b.** – 10 **c.** 0.125 **d.** – 1 **e.** 0,1

2. a. $\frac{1}{9}$ **b.** $-\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{5}{7}$ **d.** $-\frac{6}{11}$

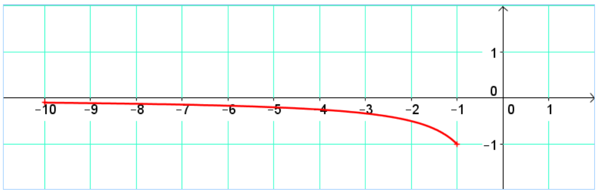
7. a. 2 **b.** $-\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{1}{7}$ **d.** $-\frac{1}{6}$ **e.** $\frac{5}{4}$ **f.** $-\frac{4}{7}$

8. a.

x	-10	-9	-8	-7	-6
$\frac{1}{x}$	$-0{,}1$	$-0{,}11$	$-0{,}13$	$-0{,}14$	$-0{,}17$

x	-5	-4	-3	-2	-1
$\frac{1}{x}$	$-0{,}2$	$-0{,}25$	$-0{,}33$	$-0{,}5$	-1

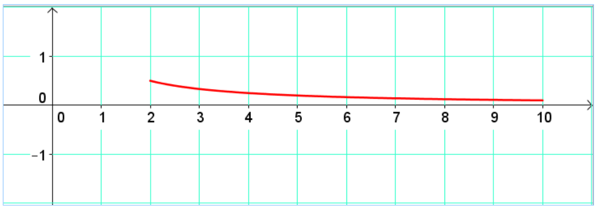
b.



c.

x	-10	-1
$f(x)$	$-0{,}1$ ↘	-1

9.



10. a. $7{,}52 < 7{,}8$.
Deux nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre, donc $7{,}52^2 < 7{,}8^2$.
b. $-4{,}53 < -4{,}2$.
Deux nombres réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans des ordres contraires, donc :

$$(-4{,}53)^2 > (-4{,}2)^2.$$

c. $0 < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$.
Deux nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre, donc :

$$(\sqrt{2} - 1)^2 < (\sqrt{2} + 1)^2.$$

d. $\frac{24}{7} = \frac{72}{21}$ et $\frac{10}{3} = \frac{70}{21}$ donc $\frac{24}{7} > \frac{10}{3}$.
Deux nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre, donc :

$$\left(\frac{24}{7}\right)^2 > \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

11. a. Si $-2 < x < 0$, alors $0 < x^2 < 4$ car des nombres réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans des ordres contraires.
Si $0 < x < 3$, alors $0 < x^2 < 9$ car des nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
Conclusion : si $-2 < x < 3$, alors $0 < x^2 < 9$.
b. Si $x \in [4 ; 10]$, alors $x^2 \in [16 ; 100]$ car des nombres réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

12. a. $2{,}57 < 2{,}6$.
Deux nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires, donc $\frac{1}{2{,}57} > \frac{1}{2{,}6}$.
b. $-1{,}3 > -1{,}4$.
Deux nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires, donc $\frac{1}{-1{,}3} < \frac{1}{-1{,}4}$.
c. $-17{,}1 < -16{,}9$.
Deux nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires, donc $\frac{-1}{17{,}1} > \frac{-1}{16{,}9}$.
d. $-438 > -439$.
Deux nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires, donc $-\frac{1}{438} < -\frac{1}{439}$.

13. a. Si $2 < x < 8$, alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{x} > \frac{1}{8}$ car des nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.
b. Si $x \in [-5 ; -4]$, alors $\frac{1}{x} \in [-\frac{1}{4} ; -\frac{1}{5}]$ car des nombres réels non nuls de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.