Corrigés des exercices Objectif Bac

Chapitre 1

74 **1. a)** **2. a)** **3. b)** **4. b)**

75 **1.** L'affirmation est fausse car $(e^1)^2 = e^2$ et $e^{(1^2)} = e$
2. L'affirmation est vraie d'après les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
3. L'affirmation est fausse car le point de coordonnées $(1\,;\,e^1)$ n'appartient pas à la droite.
4. L'affirmation est fausse car $f(0) = 2$ et $e^{2\times 0} = 1$

76 **1.** Faux **2.** Vrai **3.** Vrai
4. Vrai **5.** Vrai **6.** Vrai

77 **Partie A : 1. a)** $\left(e^x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = e^{2x} - e^x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$
$= e^{2x} - e^x + 1 = g(x)$
b) Pour tout nombre réel x, $g(x) > 0$
2. a) $\Delta = -3 > 0$
Donc pour tout nombre réel X, $X^2 - X + 1 > 0$ (signe du coefficient de X^2)
b) Donc, pour tout nombre réel x, $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$
Partie B : 1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)^2 - 3e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

b) Pour tout nombre réel x, $f'(x) > 0$ car pour tout nombre réel x, $g(x) > 0$

x	-5	α	5
f'		$+$	
f	$-3 - \dfrac{3e^{-5}}{e^{-5}+1}$	0 ↗	$7 - \dfrac{3e^5}{e^5+1}$

2. Pour tout $x \in [-5\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$ car la fonction est croissante sur $[-5\,;\,5]$
De même, pour tout $x \in [\alpha\,;\,5]$, $0 \leqslant f(x)$
3. Avec la calculatrice, $\alpha \in [-1{,}42\,;\,-1{,}41]$

78 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

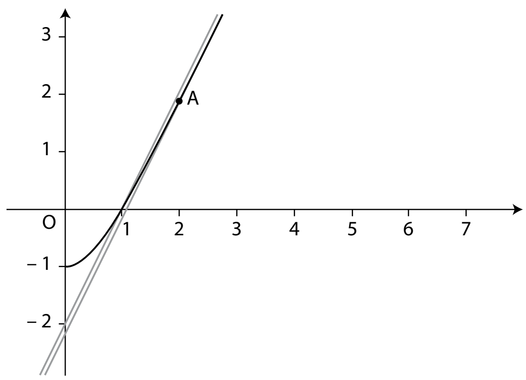
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - e^{-x} = 2$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) - (2x - 2) = (x - 1)[(2 - e^{-x}) - 2] = -e^{-x}(x - 1)$
$f(x) - (2x - 2)$ est du signe de $1 - x$.
$\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $[0\,;\,1]$ et au-dessous sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. a) f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
$f'(x) = 1(2 - e^{-x}) + e^{-x}(x - 1)$
$f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}$
$f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + xe^{-x}$
b) Pour tout nombre réel $x > 0$,
$-x < 0$
$e^{-x} < e^0$
$-e^{-x} > -e^0$
Donc $2(1 - e^{-x}) > 0$
Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$
c) $f(0) = -1$

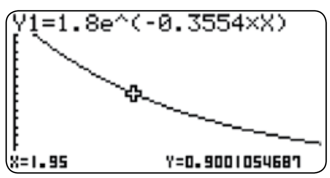
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

3.



4. $f'(x) = 2$
$xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2$
$xe^{-x} - 2e^{-x} = 0$
$e^{-x}(x - 2) = 0$
$x = 2$ car $e^{-x} > 0$
Les coordonnées de A sont $(2\,;\,2 - e^{-2})$.

79 **1. a)** $Q(0) = 1{,}8e^{-\lambda\times 0} = 1{,}8$
$Q'(t) = -\lambda \times 1{,}8e^{-\lambda\times t} = -\lambda\, Q(t)$
b) $Q(1) = Q(0) \times 0{,}7 = 1{,}8e^{-\lambda}$
$0{,}7 = e^{-\lambda}$
Avec la calculatrice, $\lambda \approx 0{,}356\,7$
2. a)



b) La quantité de substance est réduite de moitié pour $t \approx 1{,}9$ h.

80 **1.** $\lim_{x \to +\infty} P(x) = 0$

Une épaisseur de plaque plastique acrylique infinie ne laisse plus passer la lumière.

2. a) $x = 45$ cm

b) $x = 80$ cm

3. P(x) dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$P'(x) = -1{,}5e^{-0{,}015x} < 0$$

P est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le pourcentage de lumière traversant une plaque diminue avec des valeurs de x qui augmentent.

4. a) L'algorithme nous donne une valeur approchée de l'inéquation P(x) $\leqslant k$.

b)

```
"DONNER LE POURCENTAGE"?->K
"DONNER LA PRECISION N"?->N
0->A
While GraphY1(A)>K
A+10^(-N)->A
WhileEnd
A Disps
```

Pour $k = 50$ et $n = 1$, on obtient $a = 46{,}3$.

Pour $k = 25$ et $n = 2$, on obtient $a = 92{,}42$.

Chapitre 2

96 **1. b)** **2. b)** **3. b)** **4. c)**

97 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Faux**.

98 **1. Faux** :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2$ et $v_n = -n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
2. Faux : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = -1$ et $v_n = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$
3. Faux : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
4. Faux : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n$, $w_n = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

99 **Partie A** : **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = e^x - 1$
$\mathcal{T} : y = (e^a - 1)(x - a) + (e^a - a - 1)$
$\mathcal{T} : y = (e^a - 1)x + e^a(1 - a) - 1$
2. $N \in (\mathcal{T})$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $(\mathcal{T})$.
D'où $-b - 1 = (e^a - 1)b + e^a(1 - a) - 1$
$0 = be^a + e^a - ae^a$
$0 = b + 1 - a$
Soit $b - a = -1$
3. $a = 1{,}5$ donc $b = 0{,}5$
On place le point M d'abscisse 1,5 de $(\mathscr{C})$ et le point N de $(\mathscr{D})$ d'abscisse 0,5.
On trace la droite (MN).
Partie B : **1.** D'après le graphique, f est positif sur $\mathbb{R}$.
2. On en déduit que pour tout nombre x réel,
$e^x - x - 1 \geqslant 0$
On remplace x par $\frac{1}{n}$. Donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geqslant 0$ soit (1) $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$
On remplace x par $-\frac{1}{n+1}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$,
$e^{-\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n+1} - 1 \geqslant 0$ soit $e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} > 0$ et $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
soit $e \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
4. De même, pour tout n de $\mathbb{N}$,
$\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
$\frac{1}{e} \geqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} > 0$
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$
Donc $e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$
5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant e$ $\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{n+1}{n} \geqslant e$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant e\frac{n}{n+1}$
Donc $e\frac{n}{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$
De plus, $\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} e\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$
D'après le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

100 **1.** $U_0 = 0$
$U_1 = U_0 + 2(0 + 1) = 2$
$U_2 = U_1 + 2(1 + 1) = 6$
$U_3 = U_2 + 2(2 + 1) = 6 + 6 = 12$
2. La proposition 1 est fausse car $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$
La proposition 2 est vraie car pour $n = 1$, $U_1 = 1^2 + 1 = 2$
La proposition 3 est fausse car pour $n = 2$, $U_2 \neq 2^2 + 1$
3. a)

Entrée
N = 3
P = 0
Traitement
K = 0
  P prend la valeur 0 + 0
  Afficher 0
K = 1
  P prend la valeur 0 + 1
  Afficher 1
K = 2
  P prend la valeur 1 + 2
  Afficher 3
K = 3
  P prend la valeur 3 + 3
  Afficher 6
Fin de l'algorithme

On n'obtient pas l'affichage des 4 premiers termes de la suite U.

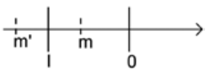
b)

Entrée
N est un entier naturel non nul
Initialisation
P = 0
Traitement
Pour K de 0 jusqu'à N
  P prend la valeur P + 2K
  Afficher P
Fin de l'algorithme

4. a) Pour tout entier naturel n non nul, $U_n = U_{n-1} + 2n$ donc $U_n \geqslant 2n$ car $U_{n-1} \geqslant 0$
Pour $n = 0$, $U_0 = 0 \geqslant 0$
b) On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

101 (A) **Faux**, par exemple, $u_n = n - 1$
(B) **Vrai** d'après un théorème de comparaison.
(C) **Faux**, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$, $u_1 = 5$ et $u_n = n + 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$
(D) **Faux**, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_1 = 0{,}1$, $u_2 = 0{,}4$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 3$
(E) **Vrai** d'après un théorème des gendarmes.

102 **a) Vraie** : u est une suite à termes positifs convergente vers un réel ℓ.
Montrons que $\ell \geqslant 0$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.



On suppose que $\ell < 0$, il existe un réel m tel que $\ell < m < 0$,
Il existe aussi un réel m' tel que $m' < \ell$.
u converge vers ℓ signifie qu'à partir d'un certain rang N_0, l'intervalle $]m' ; m[$ contient tous les termes u_n de rang supérieur à N.
Ce qui signifie que pour tout $n \geqslant N_0$, $m' \leqslant u_n \leqslant m < 0$, ce qui est absurde car u est une suite à termes positifs.
Donc $\ell \geqslant 0$ et $\ell \neq -1$
b) Vraie : u est croissante donc par définition, pour tout n de $\mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} - \frac{u_n}{1 + u_n}$$
$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 + u_{n+1})(1 + u_n)} \geq 0$$

car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $(1 + u_{n+1})(1 + u_n) > 0$ (u est une suite à termes positifs)
c) Faux : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{n}{1+n}$. La suite v converge, ce qui n'est pas le cas de la suite u.

103 **1.** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ donc tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang N. Or $v_n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, donc, à partir de ce rang N, tous les u_n sont aussi dans $]A ; +\infty[$ donc :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

$u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$

$u_3 = \dfrac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = -\dfrac{1}{8} + 1 = +\dfrac{7}{8}$

b) Pour tout nombre entier $n \geqslant 4$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$ donc $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2$.
Or, pour tout nombre entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$ donc, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 4$, $u_{n-1} \geqslant 0$ et donc $u_n \geqslant n - 2$.
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

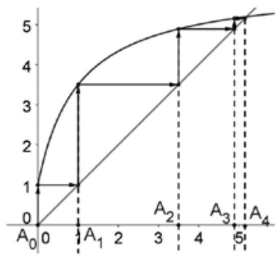
Chapitre 3

68 **1. c)** u est strictement décroissante et minorée par 1, donc convergente.
2. c) pour tout n de N, $e^{-v_n} \leqslant 1$
3. b) pour tout n de N, $e^{-v_n} \geqslant e^{-2}$
4. a) La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$

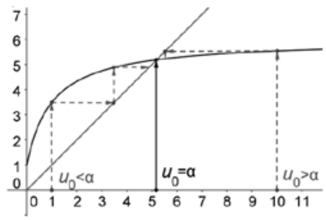
69 **1. Faux**. Contre-exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$. u n'est ni majorée, ni minorée et diverge.
2. Vrai. Si u est croissante et bornée, elle est croissante et majorée donc convergente.
Si u est décroissante et bornée, elle est décroissante et minorée donc convergente.
3. Faux. Contre-exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ ou $v_n = \cos n$ sont des suites bornées et divergentes.
4. Vrai. La suite $(-u_n)$ est croissante non majorée donc a pour limite $+\infty$
5. a) Faux. Contre-exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = -e^{-n}$. u est croissante majorée par 0.
b) Faux. Contre-exemple : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. u diverge et u^2 converge vers 1 (suite constante)

70 **1. a) Faux** : $u_4 = \dfrac{2}{3}$
b) Vrai : $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $-n^2 + n + 1$
c) Vrai : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. a) Faux.
b) Vrai. La suite (w_n) est de raison 2.
c) Vrai. Dès que v_n est un entier, v_{n+1} est impair.
3. a) Vrai. La suite (t_n) est de raison $q = e^{-1}$
b) Vrai. La raison q, de la suite (t_n) est strictement comprise entre 0 et 1.
c) Faux. La limite est $\dfrac{1}{e-1}$

71 **1. a)** Pour $x \geqslant 0$, on obtient :
$$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$
f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b) $f(x) = x$ équivaut à $x^2 - 5x - 1 = 0$.
$\Delta = 29 > 0$.
La solution positive est $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$
c) f est croissante donc si $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.
$f(0) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc
$0 \leqslant 1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ et $f(x) \in [0\,;\alpha]$
d) $f(x) - x = \dfrac{-(x^2-5x-1)}{x+1}$ donc $f(x) - x$ est du signe de $-(x^2 - 5x - 1)$ sur $[0\,;+\infty[$
α est la racine positive de ce trinôme donc :
si $x \in [0\,;\alpha]$ $f(x) - x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant x$
si $x \in [\alpha\,;+\infty[$ $f(x) - x \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant x$

2. a)


b) Par récurrence :
• $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$
• On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
Alors $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$
d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.
Pour tout nombre entier n,
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
c) u est croissante et majorée par α (question **2. b)**) donc elle est convergente vers un réel ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant \alpha$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - \dfrac{5}{u_n+1} = 6 - \dfrac{5}{\ell+1}$ donc ℓ est la solution positive de l'équation $f(x) = x$ et $\ell = \alpha$

3.


On conjecture que :
– pour $0 < u_0 < \alpha$, u est croissante et converge vers α.
– pour $u_0 = \alpha$, u est constante et converge vers α.
– pour $u_0 > \alpha$, u est décroissante et converge vers α.
Justification :
Si $0 < u_0 < \alpha$, $u_1 = f(u_0)$ et $f(u_0) \geqslant u_0$ d'après la question 1. d)
La propriété « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ » est initialisée et elle est héréditaire (même démonstration que 2. c)
Si $u_0 > \alpha$, $u_1 = f(u_0)$ et $f(u_0) \leqslant u_0$ donc cette fois c'est la propriété « $\alpha \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ » qui se démontre par récurrence et on conclut de la même façon.
Si $u_0 = \alpha$, on montre par récurrence que pour tout n, $u_n = \alpha$

72 **a) Initialisation** : $u_0 = 13$ et
$1 + 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^0 = 13$
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que
$u_k = 1 + 12 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^k$. Alors
$$u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left[1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^k\right] + \frac{4}{5}$$
$$= 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

Conclusion : Pour tout nombre entier n,

$$u_n = 1 + 12\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$0 < \frac{1}{5} < 1$ donc la suite $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ est décroissante et (u_n) l'est aussi car $12 > 0$

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

b)

	$U = 13$	$S = 13$
$N = 1$	$U = \frac{17}{5}$	$S = \frac{82}{5}$
$N = 2$	$U = \frac{37}{25}$	$S = \frac{447}{25}$
$N = 3$	$U = \frac{137}{125}$	$S = 18{,}976$
$N = 4$	$U = 1{,}0192$	$S = 19{,}9952$

La variable U reçoit les différents termes de la suite : depuis u_0 à l'initialisation, jusqu'à u_n à la fin de la boucle ($k = \text{N}$)
La variable S reçoit la somme des termes de la suite déjà calculés pour $k = 1$, $\text{S} = u_0 + u_1$ etc. pour $k = n$, $\text{S} = u_0 + \ldots\, u_n$
Pour un nombre entier N, l'algorithme affiche la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

c) $S_n = u_0 + \ldots + u_n$ (il y a (n+1) termes)

$$= \left[1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0\right] + \ldots + \left[1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$$= (1 + \ldots + 1) + 12\left[1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$$= (n+1) + 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= (n+1) + 15\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]$$

Pour tout nombre entier n,

$$S_n = (n + 16) - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

d) • $(n + 16)$ est une suite croissante.

$0 < \frac{1}{5} < 1$ donc la suite $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ est décroissante et la suite $\left(-3\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$ est croissante, donc par somme (S_n) est croissante.

• $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n + 16) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

2. Proposition 1 : **Faux**. La suite u de la question 1 a pour limite 1 donc elle est convergente mais la suite S est divergente (limite infinie).
Proposition 2 : **Faux**. La suite u de la question 1 est décroissante ($0 < \frac{1}{5} < 1$ et $12 > 0$) alors que la suite S est croissante.

73 **1. a)**
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 0{,}75 \\ &= 0{,}2u_n + 0{,}6 - 0{,}75 \\ &= 0{,}2u_n - 0{,}15 \\ &= 0{,}2(u_n - 0{,}75) \\ &= 0{,}2v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,2.
b) $0 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}2^n$ et
$v_0 = u_0 - 0{,}75 = -1{,}75$
$u_n = v_n + 0{,}75$ d'où $u_n = 0{,}75 - 1{,}75 \times 0{,}2^n$

b) $S_n = (v_0 + 0{,}75) + \ldots + (v_n + 0{,}75)$ ($n + 1$ termes)

$$\begin{aligned} &= (v_0 + \ldots + v_1) + 0{,}75\,(n + 1) \\ &= -1{,}75\,(1 + 0{,}2 + \ldots + 0{,}2^n) + 0{,}75\,(n + 1) \\ &= -1{,}75 \times \frac{1 - 0{,}2^{n+1}}{1 - 0{,}2} + 0{,}75n + 0{,}75 \end{aligned}$$

$S_n = -2{,}1875\,(1 - 0{,}2^{n+1}) + 0{,}75n + 0{,}75$

c) $0 < 0{,}2 < 1$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n+1} = 0$

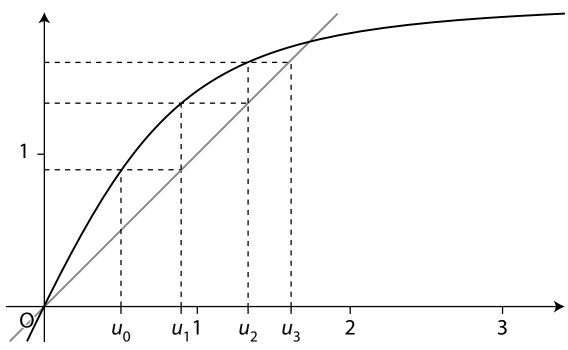
$\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}75n + 0{,}75) = +\infty$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

74 **1.** Cette démonstration est disponible à la page 72 du manuel élève.

2. a) Dans l'expression de la dérivée donnée par le logiciel Xcas, numérateur et dénominateur sont toujours strictement positifs, donc, pout tout $x \in [0\,;\infty[$; $f'(x) > 0$.
Ainsi, $f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$, donc si $0 < x < 2$, alors $0 < f(x) < 2$.

b)



c) • $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2 \times 0,5}{\sqrt{0,5^2 + 1}} \approx 0{,}89$.

• On démontre, sans difficulté, par récurrence, que u est bornée entre 0 et 2 (en utilisant le **2. a)**).

• Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2 \times u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - u_n = u_n \times \frac{2 - \sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

Or, $0 < u_n < 2$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, ainsi $u_{n+1} > u_n$, la suite u est donc croissante.

d) La suite u est croissante et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ.

De plus, d'après le **1.**, $0 < \ell < 2$.

e) Si la suite u convergeait vers 2, alors on aurait $f(2) = 2$, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite u ne converge pas vers 2.

Chapitre 4

97 **1. b)** **2. a)** **3. a)** **4. c)**

98 **1.** Vraie **2.** Fausse **3.** Vraie
4. Vraie **5.** Fausse

99 **1. Fausse** : f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

2. Fausse : f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$

3. Vraie d'après les propriétés (admises) de la limite d'un quotient.

100 **1.** n est un nombre entier naturel.

$f_n(0)=\dfrac{e^0}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$

$A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ est commun aux courbes.

2. a) f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_0'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$f_0'(x)>0$ donc f_0 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_0(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=0$

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_0$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=1$

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_0$ en $+\infty$.

c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$ donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_0	+	
f_0	0 ↗	1

3. a) $f_1(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^x\times e^{-x}}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{1}{1+e^x}$

$f_1(-x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}=f_0(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$

c) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_0$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. a) n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,

$f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{nx}\times e^{-nx}}{e^{nx}+e^{nx}\times e^{-x}}=\dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$

b) $n\geqslant 2$ donc $n-1>0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(n-1)x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(n-1)x}=0$ avec $e^{(n-1)x}>0$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx}=0$ avec $e^{nx}>0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$

$n\geqslant 2$ donc $n-1>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(n-1)x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(n-1)x}=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{nx}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.

c) Pour $n\geqslant 2$,

$x\mapsto e^{nx}$ et $x\mapsto e^{(n-1)x}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$e^{nx}+e^{(n-1)x}>0$$

La fonction inverse $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Donc par composée de fonction, f_n est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	0

101 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

2. a) x est un nombre réel non nul,

$$x\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right)=x+\frac{x}{e^x-1}=\frac{xe^x}{e^x-1}=f(x).$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{e^x-1}=1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. a) x est un nombre réel non nul,

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-e^0}{x-0}$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\exp'(0)=1.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$

et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=1$

102 **1. b)** **2. b)** **3. c)**

103 **1. b)** Les courbes de f et de g se rapprochent pour des abscisses de grandes valeurs.

2. a) x est un nombre réel strictement plus grand que -2,

$\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{x^3-3x-6}{2(x+2)}$

$= \frac{(x-1)^2(x+2)-(x^3-3x-6)}{2(x+2)}$

$= \frac{(x^2-2x+1)(x+2)-(x^3-3x-6)}{2(x+2)}$

$= \frac{x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2-x^3+3x+6}{2(x+2)}$

$= \frac{8}{2(x+2)} = \frac{4}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x+2} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - f(x)] = 0$

c) Pour $x > -2$, $g(x) - f(x) > 0$

La courbe de g est au-dessus de la courbe de f sur son ensemble de définition.

3. a) Cet algorithme détermine le plus petit nombre entier x tel que $g(x) - f(x) < a$.

b) L'algorithme affiche la valeur 398 lorsqu'on saisit $a = 0{,}01$.

104 **1. a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptotes, les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

Chapitre 5

75 **1. b)** **2. a)** **3. b)** **4. a)** **5. b)** **6. c)**

76 **1. Faux** **2. Faux**
3. a) Vrai **b) Vrai**

77 **1. Vrai**
g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = -xe^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Sur $]-\infty\,;0]$, $g(x) > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
$0 \in \,]-\infty\,;2]$, donc d'après le tableau de variation, $g(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0\,;+\infty[$.
L'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. Vrai
$g(\alpha) = 0$
$e^{\alpha}(1-\alpha) + 1 = 0$
$e^{\alpha} = -\dfrac{1}{1-\alpha}$ (car $\alpha \neq 1$)
$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{\alpha}+1} + 2 = \frac{\alpha}{1-\dfrac{1}{1-\alpha}} + 2$$
$$f(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{-\alpha} + 2 = 1+\alpha$$
3. Vrai
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} + 2$
$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
4. Faux
5. Faux
Dans la question **a)**, on a montré que g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
6. Faux
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$
f' est donc du signe de g
7. Vrai
$$y = \frac{e^0 + 1 - 0e^0}{(e^0+1)^2}(x-0) + \frac{0}{e^0+1} + 2$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

78 **1.** L'abscisse de A est environ 0,9 et l'abscisse de B environ – 1,3
2. a) $y = e^a x - ae^a + e^a$
b) $y = -2bx + b^2 - 1$
c) $\begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = b^2 - 1 \end{cases}$
d) On substitue $-\dfrac{e^a}{2}$ à b dans la deuxième équation, après multiplication par 4, il vient :
$$-4ae^a + 4e^a = e^{2a} - 4$$
d'où le système équivalent :
$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$$
3. a) Si $x \in \,]-\infty\,;0[$, $e^x < 1$ donc $e^{2x} < 1$
$e^{2x} - 4 < -3 < 0$
Si $x \in \,]-\infty\,;0[$, $x - 1 < -1 < 0$ et $e^x > 0$ donc $4e^x(x-1) < 0$
b) On en déduit que si $x \in \,]-\infty\,;0[$,
$e^{2x} - 4 + 4e^x(x-1) < 0$
$f(x) < 0$
(E) n'a donc pas de solution dans $]-\infty\,;0[$.
c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x$
$e^x > 0$, $e^{2x} > 0$, $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
d) f est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$
$f(0) = -7$, $f(1) \approx 3{,}4$
$0 \in [f(0)\,;f(1)]$ donc l'équation (E) admet une solution a unique dans $[0\,;1]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
Si $x > 1$, comme f est croissante sur $[0\,;+\infty[$,
$f(x) > f(1) > 0$
La calculatrice donne $0{,}84 \leqslant a \leqslant 0{,}85$
4. $-2b = e^a$ donne $b = -\dfrac{1}{2}e^a$ donc
$$-\frac{1}{2}e^{0,85} \leqslant b \leqslant -\frac{1}{2}e^{0,84}$$
$-1{,}2 \leqslant b \leqslant -1{,}1$

79 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynôme.
$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'				$+$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) $0 \in \,]-2\,;2[$ donc d'après le tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $]0\,;1[$.
2. a) Cet algorithme approche α à 0,1 près.
b)

Étape	0	1	2
a	0	0,5	0,5
b	1	1	0,75
m		0,5	0,75
$f(m)$		– 0,375	0,67
$b-a$		$1 > 0{,}1$	$0{,}5 > 0{,}1$

Étape	3	4	5
a	0,5	0,562 5	
b	0,625	0,625	
m	0,625	0,5625	
$f(m)$	0,12	– 0,13	
b-a	$0{,}25 > 0{,}1$	$0{,}125 > 0{,}1$	$0{,}062\,5 < 0{,}1$

c) $0{,}59 < \alpha < 0{,}60$

80 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	-1 ↗	$+\infty$

$0 \in [-1\,;+\infty[$ donc d'après le tableau de variation, $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $[0\,;+\infty[$.

c) $f(\alpha) = 0$ et f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc si $x \in [0\,;\alpha[$, $f(x) < 0$

Si $x \in\,]\alpha\,;+\infty[$, alors $f(x) > 0$

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = f(x)$ donc d'après **1. c)** g est décroissante sur $[0\,;\alpha]$, croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

b) $g(\alpha) = (\alpha-1)(e^\alpha - 1)$

D'après **1.**, $\alpha e^\alpha = 1$ donc $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

$$g(\alpha) = (\alpha-1)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

81 **Conjectures**

Si on suppose que les graduations correspondent à une unité, on peut émettre comme conjectures que la fonction f est croissante sur $[-3\,;2]$, et que la courbe est située sous l'axe des abscisses pour x négatif, et au-dessus de l'axe des abscisses pour x positif.

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x\left[e^{x-1}(2+x) - 1\right] = xg(x)$$

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ par produit des limites et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = 0$ et en utilisant le fait que la fonction exponentielle « l'emporte » sur les puissances de x.

b) On trouve $g'(x) = e^{x-1}(2+x) + e^{x-1} = e^{x-1}(3+x)$.

Comme $e^{x-1} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(x+3)$.

On peut donc dire que si $x \leqslant -3$, alors $g'(x) \leqslant 0$ et si $x \geqslant -3$, alors $g'(x) \geqslant 0$.

c) La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;-3]$ et croissante sur $[-3\,;+\infty[$. Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	-1 ↘	$-e^{-1}-1$ ↗	$+\infty$

d) Sur $[-\infty\,;-3]$, g est majorée par -1, donc g ne peut s'annuler. Sur $[-3\,;+\infty[$, g est continue (car dérivable), strictement croissante, vers $[g(-3)\,;+\infty[$. Comme 0 appartient à cet intervalle,le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. D'où l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. Comme $g(0{,}20) \simeq -0{,}01 < 0$ et que $g(0{,}3) \simeq 0{,}14 > 0$, on en déduit bien l'encadrement de α proposé.

e) Toujours en utilisant le tableau de variations de g, on a $g(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\alpha]$ et $g(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha\,;+\infty[$.

3. a) Comme $f'(x) = xg(x)$, on peut en déduire que sur $]-\infty\,;0]$ $f'(x)$ est du signe contraire de $g(x)$, c'est-à-dire positif. Sur $[0\,;\alpha]$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui est négatif, et enfin sur $[\alpha\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui est positif.

b) En conclusion, on peut dire que f est croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$, décroissante sur $[0\,;\alpha]$, et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

c) La première conjecture émise est donc fausse. Cela s'explique quand on calcule une valeur approchée de $f(\alpha)$ qui vaut $-0{,}002$. Cette valeur est donc invisible sur le graphique par rapport à l'échelle adoptée sur la calculatrice.

Partie B

1. On sait que $g(\alpha) = 0$, ce qui se traduit par :

$$(\alpha+2)e^{\alpha-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2} \quad (\alpha \neq -2)$$

En reportant dans l'expression de $f(\alpha)$, on trouve :

$$f(\alpha) = \alpha^2e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$$

2. a) La fonction h est dérivable sur $[0\,;1]$, et

$$h'(x) = -\frac{3x^2(x+2) - x^3}{2(x+2)^2} = -\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Sur $[0\,;1]$, $h'() < 0$, et donc la fonction h est décroissante sur $[0\,;1]$.

b) Il suffit de remarquer que $f(\alpha) = h(\alpha)$, d'où :

$$0{,}20 < \alpha < 0{,}21 \Leftrightarrow h(0{,}21) < h(\alpha) < h(0{,}20)$$
$$\Leftrightarrow -0{,}002\,09 < f(\alpha) < -0{,}001\,82$$

3. a) On résout l'équation $f(x) = 0$, qui équivaut à :

$$x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 + \ln\frac{1}{2} = 1 - \ln 2$$

Les abscisses des deux points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x\,x')$ sont donc 0 et $1 - \ln 2$.

b) Il suffit d'étudier le signe de $f(x)$, qui est celui de $\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$. Or

$$x < 1 - \ln 2 \Leftrightarrow e^x < e \times e^{-\ln 2} \Leftrightarrow e^{x-1} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

donc $\mathscr{C}$ est située au-dessous de l'axe des abscisses pour x appartenant à $]-\infty\,;1 - \ln 2[$. De même, on prouve que $x > 1 - \ln 2$, soit $f(x) > 0$, et donc que $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses pour x appartenant à $]1 - \ln 2\,;+\infty[$.

c) La deuxième conjecture est fausse, ce qui s'explique par le fait que le graphique n'est pas assez précis pour émettre une conjecture valable.

Chapitre 6

125 **1. a)** **2. b)** **3. c)** **4. b)** **5. b)**

126 **1. a) Vrai** **b) Faux** **c) Faux** **d) Vrai**
2. a) Faux **b) Vrai** **c) Vrai**

127 **1. Vrai** : $f(0) = \mathrm{e}$
2. Faux : $f(1) = 0$
3. Faux : $g'(0) = f'(0) \times \dfrac{1}{f(0)} = \dfrac{0}{\mathrm{e}} = 0$
4. Vrai : Les solutions sont les abscisses des points ayant pour image e.
5. Faux : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = 0$
Donc $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = -\infty$

128 **Partie A** :
1. u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$
$u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$
Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $u'(x) > 0$ donc u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$
2. a) u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$
$0 \in \left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} u(x)\,;\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)\right[$
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l'équation $u(x) = 0$.
b) Avec la calculatrice,
$$1{,}31 < \alpha < 1{,}32$$
3. u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc sur $]0\,;\alpha[$, $x < \alpha$, $u(x) < u(\alpha)$, soit $u(x) < 0$
$u(\alpha) = 0$ et sur $]\alpha\,;+\infty[$, $u(x) > u(\alpha) = 0$
soit $u(x) > 0$
4. $u(\alpha) = 0$
$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$
$\ln \alpha = 2 - \alpha^2$
Partie B
1. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$
$f'(x) = 2x + 2 \times \dfrac{-1}{x} \times (2 - \ln x)$
$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x} u(x)$
2.

x	0		α		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\alpha^2 + \alpha^4$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 = \alpha^2 + (2 - 2 + \alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4$

Partie C
1. Dans le repère orthonormé,
$\mathrm{AM} = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2}$
$\mathrm{AM} = \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} = \sqrt{f(x)}$
2. a) f admet un minimum en α qui vaut $\alpha^2 + \alpha^4 > 0$
g est donc bien définie sur $]0\,;+\infty[$
f est strictement décroissante sur $]0\,;\alpha[$
La fonction racine est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc par composée de fonctions, g et f possèdent les mêmes variations.
b) On en déduit que g admet un minimum qui vaut $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$ en α.
$\mathrm{P}\left(\alpha\,;\sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}\right)$
c) $\mathrm{AP} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2}$
$= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ car $\alpha > 0$
3. Le coefficient directeur de la droite (AP) est $\dfrac{\ln \alpha - 2}{\alpha}$
Le coefficient directeur de la tangente est $\ln'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$
$\dfrac{\ln \alpha - 2}{\alpha} \times \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1$ (On utilise la question 4 de la partie A, $\ln \alpha - 2 = -\alpha^2$)
La droite (AP) est perpendiculaire à la tangente Γ.

129 **a)**

	x	t	s	$s-t$	n
0	1,5				3
1	0,5	0,375	0,5	0,125	3
2	0,5	0,4010	0,4166	0,0156	5
3	0,5	0,4046	0,4072	0,0026	7
4	0,5	0,4053	0,4058	0,0004	9

b) On continue l'algorithme,

	x	t	s	$s-t$	n
5	0,5	0,40543	0,40553	0,00009	11
6	0,5	0,40545	0,40547	0,00002	13
7	0,5	0,40546	0,40546	0,000004	14

On obtiendra $n = 15$
c)

	x	t	s	$s-t$	n
0	$x-1$				3
1	$x-1$	$x - \dfrac{x^2}{2}$	x		

$x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln x \leqslant x$

130 **Partie A** : **1.** Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x$
$x - \ln(x^2 + 1) = x$
$\ln(x^2 + 1) = 0$
$x^2 + 1 = 1$
$x = 0$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

f est donc croissante sur [0 ; 1]

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

Soit $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 - \ln(2) < 1$

Partie B :

1. Initialisation : $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé. On suppose que $u_k \in [0\,;1]$ alors $u_{k+1} = f(u_k) \in [0\,;1]$ d'après la question précédente.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;1]$

2. n est un entier de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) < 0$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0, elle est donc convergente vers un réel ℓ.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n - \ln(u_n^2+1)] = \ell$

ℓ est donc la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$

D'après la question 1 de la partie A, $\ell = 0$

131 **1. a)** T : $y = \dfrac{1}{a}(x-a) + \ln a$

$y = \dfrac{1}{a}x - 1 + \ln a$

b) P a pour ordonnée $-1 + \ln a$.

PQ $= \ln a + 1 - \ln a = 1$.

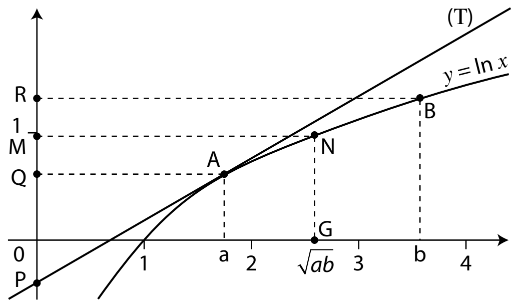
P est l'image de Q par la translation de vecteur $\vec{j}$.

2. Pour tout nombre réel m strictement positif :

$\ln m = \ln(\sqrt{m} \times \sqrt{m}) = \ln\sqrt{m} + \ln\sqrt{m}$

donc $2\ln\sqrt{m} = \ln m$ c'est-à-dire $\ln\sqrt{m} = \dfrac{1}{2}\ln m$.

3. $\ln\sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}\ln(ab) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$



On trace le milieu M du segment [RQ] puis le point N de Γ dont l'ordonnée est celle de M.

G est le point de même abscisse que N.

Chapitre 7

64 **1. c)** **2. c)** **3. a)** **4. b)**

65 **1.** Affirmation fausse : $f(0) = 0$ et $f(\pi) = -\dfrac{\pi}{2}$

2. Affirmation fausse : f est dérivable sur $[-\pi ; \pi]$,
$f'(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

3. Affirmation fausse :
$y = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}x + 1$

4. Affirmation vraie :

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

$0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right]$, donc d'après le tableau de variation,
l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α sur $\left[\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right]$.
Sur $\left]0 ; \dfrac{\pi}{3}\right]$, $f(x) > 0$

Conclusion : Sur $]0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

5. Affirmation vraie.

66 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Vrai** **4. Faux** **5. Faux**

67 **1. a)** Avec la calculatrice, on conjecture que
$\theta_{min} = \dfrac{\pi}{4}$

b) Après plusieurs essais pour différentes valeurs de m,
$\theta_{min} = \dfrac{\pi}{4}$

On conjecture que θ_{min} est indépendant de m.

2. a) F est dérivable sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{3}\right]$

$F'(\theta) = -\dfrac{m(-\sin\theta + \cos\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}$

b) θ est un nombre réel de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{3}\right]$

$\sqrt{2}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

$= \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$

c) d) $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ donc $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{7\pi}{12}$

Donc, $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ pour

$\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ soit $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$

Et $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$ pour $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$

θ	0		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{3}$
$-m$		$-$		$-$	
$\cos\theta - \sin\theta$		$+$	0	$-$	
F′		$-$	0	$+$	
F	m	$\searrow$	$\dfrac{m}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\dfrac{2m}{1+\sqrt{3}}$

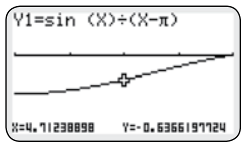
e) F admet un minimum $F(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}m$ atteint pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3. b) On peut tirer 72 N, avec deux angles différents approximativement 0,6 rad et 1 rad.

4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}m = 150$

$m = \dfrac{300}{\sqrt{2}}$ soit $m \approx 212$ kg

68 **1. a)** et **b)** Voir § 1 p. 176.



2. a) Avec la calculatrice, on conjecture que $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -1$

b) x est un nombre réel de $]\pi ; 2\pi]$, h est le nombre réel défini par $h = x - \pi$

$f(x) = f(h + \pi) = \dfrac{\sin(h + \pi)}{h}$

$= \dfrac{\sin h\cos\pi + \sin\pi\cos h}{h} = -\dfrac{\sin h}{h}$

$\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{\sin h}{h} = -1$

69 **1. a)** t est un nombre réel,
$d(t) = 0{,}1\sin(4\pi t + 2\pi)$
$= 0{,}1\sin\left(4\pi\left(t + \dfrac{1}{2}\right)\right) = d\left(t + \dfrac{1}{2}\right)$

Donc d est périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

b) $d(t) = 0$
$0{,}1\sin(4\pi t) = 0$
$4\pi t = k\pi$, k est un nombre entier de $\mathbb{Z}$
$t = \dfrac{k\pi}{4\pi} = \dfrac{k}{4}$

Pour $k = 0$, $t = 0$ et pour $k = 1$, $t = \dfrac{1}{4}$

Durée de la systole : 0,25 seconde
Durée de la diastole : 0,25 seconde

c) $d(t) = 0{,}1$
$0{,}1\sin(4\pi t) = 0{,}1$

$\sin(4\pi t) = 1$

$4\pi t = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, k un nombre entier de $\mathbb{Z}$

$t = \dfrac{1}{8} + \dfrac{k}{2}$

Pour $k = 0$, $t = \dfrac{1}{8}$

Le débit est maximal à 0,125 s

d) d est dérivable sur $\left[0 ; \dfrac{1}{4}\right]$

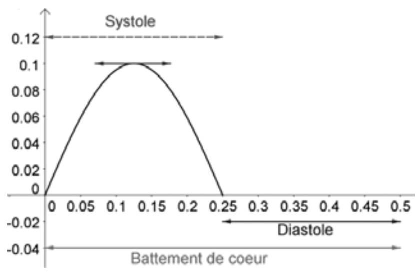
$d'(t) = 4\pi \times 0{,}1 \cos(4\pi t)$

$\cos(4\pi t) \geqslant 0$ pour $0 < 4\pi t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

c'est-à-dire $0 < t \leqslant \dfrac{1}{8}$

t	0		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$
$d'(t)$		+	0	−	
$d(t)$	0	↗	0,1	↘	0

e)



2. t est un nombre de $[0 ; 0{,}5]$

$a(t) = 4\pi \times 0{,}1 \cos(4\pi t)$

$\cos(4\pi t) = 1$

$4\pi t = 0 + k2\pi$, k un nombre entier de $\mathbb{Z}$

$t = \dfrac{k}{2}$

L'accélération est maximale pour $t = 0$, elle est de $4\pi \times 0{,}1$ L/s^2 ($\approx 1{,}25$ L/s^2)

70 **1. a)** Pour tout nombre réel x,

$-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 - x \leqslant f(x) \leqslant 1 - x$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -1 - x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x = +\infty \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -1 - x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) Pour tout nombre réel $t \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

• $f'(t) = -2\sin(2t) - 1$.

• $0 \leqslant 2t \leqslant \pi \Leftrightarrow \sin(2t) \geqslant 0 \Leftrightarrow -2\sin(2t) \leqslant 0 \Leftrightarrow f'(t) \leqslant 0$

f est donc une fonction strictement décroissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $\cos(2x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

• $f(0) = 1 > 0$

• $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 - \dfrac{\pi}{2} < 0$

• f est strictement décroissante sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• f est continue sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. a) Cet algorithme détermine un encadrement de α par dichotomie.

b) Pour $P = 0{,}1$: $\alpha \in [0{,}49 ; 0{,}589]$

Pour $P = 0{,}01$: $\alpha \in [0{,}509 ; 0{,}515]$

Chapitre 8

100 **1. c)** **2. b)** **3. c)** **4. c)**

101 **1. Vrai** : G(0) = G(1) = 0

2. Vrai : G est dérivable sur [0 ; +∞[car f est continue.

Sur [0 ; + ∞[, $G'(x) = F(x) + xf(x)$

3. Vrai car sur [0 ; 1], $xf(x) > 0$ mais $F(x)$ est négative

4. Faux.

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt$$

$$= -\int_1^0 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = F(2) - F(0)$$

102 **1. Vrai** **2. Faux** **3. Faux** **4. Vrai** **5. Faux**

103 **1.** f est dérivable sur [0 ; 1]

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur [0 ; 1]

2. a) k un nombre entier compris entre 0 et 4 et x est un réel de [0 ; 5] tel que :

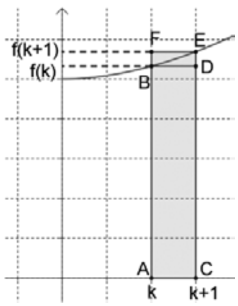
$$\frac{k}{5} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{5}$$

$f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ car f est strictement croissante sur [0 ; 1]. Donc :

$$\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right) dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right) dx$$

$$f\left(\frac{k}{5}\right)\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right)\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$



L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = k$, $x = k + 1$, $y = 0$ et $\mathscr{C}$ est comprise entre les aires des rectangles ABDC et AFEC.

b) Pour $k = 0$, $\frac{1}{5}f(0) \leqslant \int_0^{\frac{1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right)$

Pour $k = 4$, $\frac{1}{5} f\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{5}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5} f(1)$

On obtient :

$$\frac{1}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \ldots + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \leqslant \int_0^{\frac{1}{5}} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{5}{5}} f(x)\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + \ldots + f(1)\right]$$

(D'après la relation de Chasles)

Soit $\frac{1}{5} S_4 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}[S_5 - f(0)]$

$\frac{1}{5} S_4 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}[S_5 - 1]$

c) $S_4 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}8178$

D'où $1{,}091 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1{,}164$

3. a) x est un nombre réel de [0 ; 1] :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1 + x - x - x^2 + x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right) dx = \int_0^1 e^x(1-x)\,dx + \mathrm{I}$

(Par linéarité de l'intégrale)

c) $g(x) = (2 - x)\,e^x$.

g est dérivable sur [0 ; 1] et

$g'(x) = -e^x + (2 - x)\,e^x = (1 - x)\,e^x$.

$\int_0^1 (1-x)\,e^x\,dx = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2$

d) D'après la question **2**,

$1{,}091 \leqslant (e^1 - 2) + \mathrm{I} \leqslant 1{,}164$

$3{,}091 - e \leqslant \mathrm{I} \leqslant 3{,}164 - e$

soit $0{,}3 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 0{,}4$.

104 **Partie A**

Sur $[a ; b]$; $g(x) - f(x) \geqslant 0$

Donc $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0$

Et par linéarité, $\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$

Partie B

1. a) Sur [0 ; 1], $f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \leqslant 0$.

f est donc décroissante sur [0 ; 1].

Donc pour tout x de [0 ; 1],

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1) \text{ soit } \frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

b) $\int_0^1 \frac{1}{e}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 dx$

Soit $\frac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$

2. $u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \int_0^1 -2xe^{-x^2} \times \frac{1}{-2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}[e^{-1} - 1] = \frac{1 - e^{-1}}{2}$$

3. a) n est un nombre entier de $\mathbb{N}^*$

$x^n e^{-x^2} \geqslant 0$ sur [0 ; 1] donc $u_n \geqslant 0$ (D'après la **Partie A**)

Pour $n = 0$, $u_0 \geqslant 0$ (D'après **1. b)**)

Donc pour tout nombre entier n, $u_n \geqslant 0$

b) x est un nombre réel de [0 ; 1]

$x^{n+1}\,e^{-x^2} - x^n\,e^{-x^2} = x^n\,e^{-x^2}\,(x - 1) \leqslant 0$

car $x \in [0 ; 1]$

Donc $x^{n+1}\,e^{-x^2} \leqslant x^n\,e^{-x^2}$ et d'après la **partie A**, $u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite est décroissante.

La suite (u_n) est donc minorée par 0 et décroissante donc convergente.

4. a) Sur $[0\,;1]$, $e^{-x^2} \leqslant 1$ donc :

$$x^n e^{-x^2} \leqslant x^n \text{ car } x^n \geqslant 0$$

Donc d'après la **partie A**,

$$u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

Soit $u_n \leqslant \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ et $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

b) $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

105 **1.** n est un nombre entier de $\mathbb{N}^*$

$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^{n} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

D'après la relation de Chasles,

$$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$$

Sur $[n\,; n+1]$, $e^{-t}\sqrt{1+t} \geq 0$

Donc $\int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \geqslant 0$

Soit $\mathrm{J}_{n+1} \geqslant \mathrm{J}_n$, la suite (J_n) est croissante.

2. a) Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant t^2 + t$

Donc $t + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$ soit

$t + 1 \leqslant (t+1)^2$ c'est-à-dire $\sqrt{t+1} \leqslant t + 1$.

b) $e^{-t}\sqrt{t+1} \leq e^{-t}(t+1)$ car $e^{-t} \geqslant 0$

Donc $\int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt \leqslant \int_1^n e^{-t}(t+1)\,dt$

Soit $\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{I}_n$

c) On détermine une primitive de $t \mapsto (t+1)e^{-t}$. a et b sont deux nombres réels, $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto ae^{-t} - (at+b)e^{-t}$ soit $t \mapsto e^{-t}(-at + a - b)$

$-a = 1$ et $a - b = 1$

Soit $a = -1$ et $b = -2$

Une primitive de $t \mapsto (t+1)e^{-t}$ est $t \mapsto (-t-2)e^{-t}$

$\mathrm{I}_n = [-(t+2)e^{-t}]_1^n = -(n+2)e^{-n} + \dfrac{3}{e} \leqslant \dfrac{3}{e}$

Donc pour tout n de N^*, $\mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{3}{e}$

d) La suite (J_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

106 **a)** Pour k variant de 0 à N – 1

$\quad \mathrm{S} \leftarrow \mathrm{S} + \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{X}^2}}$

$\quad \mathrm{X} \leftarrow \mathrm{X} + \mathrm{H}$

FinPour

$\mathrm{S} \leftarrow \mathrm{S} \times \mathrm{H}$

b) On obtient $\dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}}\right) \approx 0{,}9$

c) $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\ell = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

Chapitre 9

160 **1. c)** **2. b)** **3. c)** **4. c)** **5. a)**

161 **1. Vrai** : $\Delta = 12 - 16 = -4 < 0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.
$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - 1$ et $z_2 = \sqrt{3} + 1$
2. Faux : $|z_1| = 2$
3. Faux : $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Donc $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{3}$.

162 **1. Vrai** **2. Vrai** **3. Faux**

163 z est un nombre complexe différent de -1.
$z = \dfrac{iz}{z+1}$
$z^2 + z - iz = 0$
$z(z + 1 - i) = 0$
$z = 0$ ou $z = -1 + i$
La fonction possède deux points fixes O et M_1 d'affixe $-1 + i$
2. M est un point différent de O et de A,
$OM' = |z' - 0| = \dfrac{|i||z|}{|z+1|} = \dfrac{|z|}{|z-(-1)|} = \dfrac{OM}{AM}$
$(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = \arg(z') = \arg\left(i \times \dfrac{z}{z+1}\right)$
$= \arg\left(\dfrac{0 - z}{-1 - z}\right) + \arg(i)$
$= (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}) + \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π
3. b) $b' = \dfrac{-1 - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i} = i\dfrac{\frac{3}{4} + i}{\frac{1}{4} + 1} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$
$OB' = |b'| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = 1$
Donc $B' \in (C)$
c) M appartient à la médiatrice (Δ) équivaut à $OM = AM$,
soit $\dfrac{OM}{AM} = 1$
Donc $OM' = 1$
Si M appartient à Δ, alors M′ appartient à (C)
d) C appartient à la médiatrice du segment [OA] donc son image C′ appartient à (C).
$(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CO}) + \dfrac{\pi}{2}$ modulo $2\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π
4. a) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = x(x+1)$

$z' = \dfrac{iz}{z+1} = \dfrac{i(x+iy)}{x+1+iy} = \dfrac{-y+ix}{(x+1)+iy}$
$= \dfrac{(-y+ix)(x+1-iy)}{(x+1)^2 + y^2}$
$Im(z') = \dfrac{y^2 + x^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} = \dfrac{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \dfrac{1}{4}}{(x+1)^2 + y^2}$
M′ appartient à l'axe des abscisses équivaut à $Im(z') = 0$ et $z \neq -1$
Soit $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
(Γ) est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point A.
b) M′ appartient à l'axe des abscisses équivaut à $M' = O$ ou $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}) = 0 + k\pi$, k est un nombre entier de $\mathbb{Z}$
C'est-à-dire $M' = O$ ou $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}) + \dfrac{\pi}{2} = k\pi$
soit $M' = O$ ou $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
M appartient au cercle de diamètre [AO] privé de A.

164 **1. Vrai**
$\dfrac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-2+5i}{5+2i} = i$
Donc $OA = AB$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π
2. Faux : A et B sont respectivement les points d'affixe 1 et $-2i$. (Δ) est la médiatrice du segment [AB].
3. Faux : $|z| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$\dfrac{z}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
$z = 2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{3}}$
$z^{3n} = (2\sqrt{3})^{3n}e^{\frac{in\pi}{2}}$ donc z^{3n} est nombre réel si n est pair.
4. Faux : $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π
Et $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $1 + |i| = 2$
5. Vrai : Il existe un nombre réel θ tel que $z = e^{i\theta}$
$z^2 + \dfrac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + \dfrac{1}{e^{2i\theta}} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}$
$= \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)$
$= \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$
$= 2\cos(2\theta)$

165 **Partie A** : 1. a, b, a', b' sont des nombres réels.
$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$
$\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa' - bb' + (a'b + ab')i}$
$= aa' - bb' - (a'b + ab')i$
$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - (a'b + ab')i$
$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
2. Initialisation : $n = 1$, immédiat

Hérédité : Soit k un nombre entier naturel non nul fixé tel que $\overline{z^k} = \bar{z}^k$

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^k z} = \bar{z}^k \bar{z} = \bar{z}^{k+1}$

Conclusion : Pour tout nombre entier naturel n, non nul, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Partie B : **1.** z est solution de (E)

$\bar{z}^4 = \overline{z^4} = \overline{-4} = -4$, $\bar{z}$ est solution de (E)

$(-z)^4 = z^4 = -4$, $-z$ est solution de (E)

2. a) $z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4$

3. Les trois autres solutions de (E) sont donc $-z_0$, $\overline{z_0}$ et $-\overline{z_0}$

$-1-i$, $1-i$ et $-1+i$

166 **a)** $z_{O'} = 0$

$z_{B'} = i^3 - 3i^2 + 3i = -i + 3 + 3i = 3 + 2i$

$z_{C'} = (i\sqrt{3})^3 - 3(i\sqrt{3})^2 + 3i\sqrt{3} = -3\sqrt{3}i + 9 + 3i\sqrt{3} = 9$

b) $\overrightarrow{O'B'}$ a pour affixe $3 + 2i$ et $\overrightarrow{O'C'}$ a pour affixe 9.

Il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{O'B'}$ et $\overrightarrow{O'C'}$ ne sont pas colinéaires, donc les points O′, B′ et C′ ne sont pas alignés d'où l'affichage de Xcas.

L'application F ne conserve pas l'alignement car les points O, B et C sont alignés mais pas leurs images par F.

c) M invariant par F si, et seulement si, F(M) = M

$\Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 3z = z \Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 2z = 0$

$\Leftrightarrow z(z^2 - 3z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 3z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = 2$.

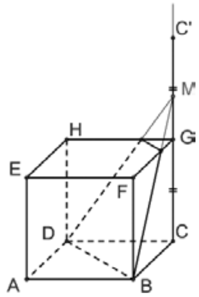
Chapitre 10

56 **1. a)** (AD) // (EH), (EH) // (FG) donc (AD) // (FG)
2. b) (AH) et (HC) sont sécantes en H dans le plan (ACH)
3. b) (HF) $\perp$ (EG), (EG) // (AC) donc (HF) $\perp$ (AC)
4. c) (II') $\perp$ (DAE) donc (II') est orthogonale à toutes les droites du plan (ADE)
5. a) (AB) et (II') sont orthogonales au plan (DAE) donc (AB) // (II')

57 **1. Faux**, (FG) et (DE) ne sont pas coplanaires car D n'appartient pas au plan (FEG).
2. Vrai, (BC) est orthogonale au plan (DCG) donc (BC) et (CH) sont perpendiculaires puisqu'elles sont sécantes et orthogonales.
3. Vrai, (AD) est orthogonale au plan (CDG) donc à la droite (CG).
4. Vrai. Les droites (PQ) et (RS) sont parallèles d'après la propriété P5 utilisée avec les plans parallèles (EFG) et (ABC) et le plan sécant (PQR).
De même (QR) // (PS).
5. Faux en général
6. Vrai, (EG) $\perp$ (FH), (EG) $\perp$ (FB) donc (EG) $\perp$ (BH) :
on utilise la propriété : « si une droite est orthogonale à deux côtés d'un triangle alors elle est orthogonale au troisième côté ».

58 **1. Faux** : (PQ) et (CG) ne sont pas coplanaires.
2. Vrai : (PT) et (RS) sont parallèles. On applique la propriété P5 avec les plans parallèles (AEH), (BFG) et le plan sécant (PQR).
3. Vrai : Dans le plan (PQR), (PQ) et (RS) sont sécantes en V qui appartient donc aux deux plans (FPQ) et (FRS) sécants suivant la droite (FB).
4. Vrai : U appartient à (PT) donc au plan (ADH).
U appartient à (QR) donc au plan (EHG).
Ces deux plans (ADH) et (EHG) sont sécants suivant la droite (HE) donc U appartient à (HE).

59 **Partie 1 :** Étude d'un volume
1.



2. a) $V(x) = \dfrac{1}{3}$ lorsque $x \approx 1{,}6$
b) $V_1 = \dfrac{1}{6}(x+1)$
c) $\dfrac{MG}{MC} = \dfrac{x}{1+x}$ donc le volume du tétraèdre MGPN est :

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \times V_1$$

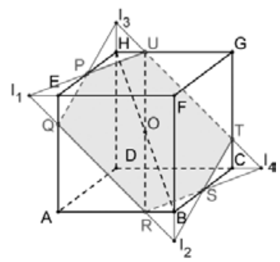
$$\begin{aligned} V(x) &= V_1 - V(MGPN) \\ &= V_1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 V_1 \\ &= \left(1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3\right) \times \frac{1}{6}(x+1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3x^2+3x+1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

d) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$:
$V(x) = \dfrac{1}{3}$ équivaut à
$3x^2 + 3x + 1 = 2(1+x)^2$
$x^2 - x - 1 = 0$
$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Partie 2
3. (CI) $\perp$ (MBD) donc (CI) $\perp$ (BD). En outre, (CM) $\perp$ (BD) donc (MI) $\perp$ (BD).
De même, (CI) $\perp$ (BM) et (DC) $\perp$ (BM) donc (ID) $\perp$ (BM).
On en déduit que I est l'orthocentre du triangle BDM.

60 **1. Faux** : ABCDEFGH est un cube.
(ADH) $\cap$ (DHG) = (DH) ;
(DHG) $\cap$ (GCB) = (GC)
et (ADH) $\cap$ (GCB) = $\varnothing$.
2. Faux : (ADH) $\cap$ (DHG) $\cap$ (FGC) = $\varnothing$
(ADH) $\cap$ (DHG) = (DH)
3. Vrai : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants ; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont parallèles. On en déduit que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.
4. Vrai : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ donc $\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$ donc $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}_1$. On en déduit que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}_2$, soit $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$.

61 **a)**



Le point I_1 d'intersection des droites (QR) et (EF) permet la construction du point U.
La parallèle à (QR) passant par U permet la construction du point T.
La parallèle à (PU) passant par R permet la construction du point S.
b) I_1RBE est un parallélogramme donc $I_1E = RB = \dfrac{1}{4}$
I_1, P, U sont alignés, P est le milieu de [EH], (I_1E) et (HU) sont parallèles donc $I_1E = HU = \dfrac{1}{4}$.

$HU = \frac{1}{4}$, $RB = \frac{1}{4}$ donc HU = RB, O est le milieu de [HB], (HU) et (BR) sont parallèles donc HUBR est un parallélogramme de centre O.

$QU^2 = QH^2 + HU^2 = QE^2 + EH^2 + HU^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

$QR^2 = QA^2 + AR^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

HABG est un rectangle de côtés $\sqrt{2}$ et 1, $HU = RB = \frac{1}{4}$

donc $UR^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$HU^2 = QU^2 + QR^2$ donc QUR est un triangle rectangle isocèle en Q. T est le symétrique de Q par rapport à O donc QRTU est un carré. Son aire est égale à $\frac{9}{8} > 1$.

62 **1.** $M \in (BJ) \cap (AC)$ médianes du triangle BAD.
N est le centre de gravité du triangle ABC.

2. a) $(AC) \perp (BD)$, $(AC) \perp (BF)$ donc $(AC) \perp (BDF)$

b) $(EB) \perp (AF)$, $(EB) \perp (AD)$ donc $(EB) \perp (AFD)$

c) Dans le triangle KDF, on a $\frac{KM}{KD} = \frac{1}{3}$ et $\frac{KN}{KF} = \frac{1}{3}$ donc (MN) // (DF)

En outre, $(AC) \perp (DF)$ donc $(MN) \perp (AC)$;
$(EB) \perp (DF)$ donc $(MN) \perp (EB)$
(MN) est donc perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC).

63 **1. a)** Vrai puisque la droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC).

b) Faux puisque le point G n'appartient pas au plan (ABE).

c) Vrai puisque la droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC) et que la droite (AC) est une droite de ce plan.

2. a) Faux car $AB = a$ tandis que $AC = a\sqrt{2}$.

b) Vrai, elles le sont en F puisque ces hauteurs sont les droites (EF), (GF), (BF) et la hauteur issue de *f*.

c) Faux puisque la droite (AF) est parallèle à la droite (DG) qui forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec la droite (GC).

3. a) Vrai, en le point A.

b) Faux, $FD = a\sqrt{3}$.

c) Vrai car (AF) est parallèle à (DG) et que (AH) est parallèle à (BG).

Chapitre 11

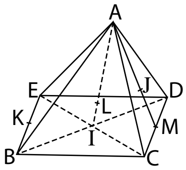
77 **1. c)** **2. b)** **3. a)** **4. a)** **5. c)** **6. a)**

78 **1. Faux** : $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 1 ; – 4)
2. Vrai car $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 1 ; – 4) et $\overrightarrow{CD}$ (3 ; 1 ; 2)
donc $-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$ (3 ; 1 ; 8)
3. Vrai : $\left(\dfrac{-2+1}{2} ; \dfrac{5+6}{2} ; \dfrac{1+3}{2}\right)$
4. Faux : $\overrightarrow{AC}$ (– 1 ; 5 ; – 2) et $\overrightarrow{DB}$ (1 ; – 5 ; – 4) ne sont pas colinéaires car $\dfrac{1}{-1} \neq -\dfrac{4}{-2}$
5. Faux : $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 1 ; – 4) et $\overrightarrow{DC}$ (– 3 ; – 1 ; – 2) ne sont pas égaux.
6. Faux : Il n'existe pas de nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

79 **1. Faux** : A n'est pas un point de la droite.
2. Vrai : Un vecteur directeur $\vec{u}$ (5 ; 1 ; 0)de la droite d est un vecteur du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Faux : d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes.

80 **1.** $\overrightarrow{AB}$ (2 ; – 3 ; – 1) , donc une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$
2. $\vec{u}$ (2 ; – 3 ; – 1) est un vecteur directeur de d.
$\vec{u}\,'$ (– 1 ; 2 ; 1) est un vecteur directeur de d'.
$\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.
Le système $\begin{cases} 2-k = 1+2t \\ 1+2k = -2-3t \\ k = -1-t \end{cases}$ n'a pas de solution, donc d et d' ne sont pas sécantes. Alors d et d' ne sont pas coplanaires.
3. a) M appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe des nombres réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} x-1 = t \\ y+2 = t+5t' \\ z+1 = -t-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t+5t' \\ z = -1-t-t' \end{cases}$$
b) A est un point de $\mathcal{P}$ ainsi que B ($t = 2$; $t' = -1$) donc $\mathcal{P}$ contient la droite d.
c) Le système :
$$\begin{cases} 2-k = 1+t \\ 1+2k = -2+t+5t' \\ k = -1-t-t' \end{cases}$$
équivaut à :
$$\begin{cases} k = 1-t \\ 3t+5t' = 5 \\ t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -4 \\ t = 5 \\ t' = -2 \end{cases}$$
$\mathcal{P}$ et d' se coupent en C (6 ; – 7 ; – 4).
4. Une représentation paramétrique de Δ est :
$$\begin{cases} x = 6+k \\ y = -7+k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = -4-k \end{cases}$$
Le système $\begin{cases} 1+2t = 6+k \\ -2-3t = -7+k \\ -1-t = -4-k \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \end{cases}$.
Les droites d et Δ sont sécantes en E (5 ; – 8 ; – 3)

81 **1.**



2. On considère le plan (AKM), I est un point de la droite (KM) et L un point de la droite (AI), donc J, I et L appartiennent au plan (AKM).
3. a) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IA}$
$= \overrightarrow{KI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IM} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{MA}$
$= \overrightarrow{KI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IM} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{MJ}$
$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{KI} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{KI} + \dfrac{1}{5}\overrightarrow{IM} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{MJ}$
$= \dfrac{3}{5}\overrightarrow{KI} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{IM} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{MJ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{KJ}$
b) $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires donc K, L et J sont alignés.

82 **1.** $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $I\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $J\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$.
K est le milieu de [IJ] donc $K\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$.
2. a) $\overrightarrow{AK}\left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{AG}$ (1 ; 1 ; 1) ne sont pas colinéaires donc A, K et G ne sont pas alignés.
b) Une représentation paramétrique du plan (AKG) est :
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}t + t' \\ y = \dfrac{1}{2}t + t' \quad \text{où } t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}. \\ z = \dfrac{1}{4}t + t' \end{cases}$$
3. D(0 ; 1 ; 0) appartient à (AKG) : $t = 4$, $t' = -1$
F(1 ; 0 ; 1) appartient à (AKG) : $t = -4$, $t' = 2$
Donc les plans (ADF) et (AKG) coïncident.

83 **1.** $\overrightarrow{AB}$ (– 3 ; 1 ; 5) et $\overrightarrow{AC}$ (– 2 ; – 3 ; 4) ne sont pas colinéaires donc A, B, C définissent un plan.
2. $\overrightarrow{AD}$ (– 1 ; 0 ; – 1), il n'existe pas de nombres réels x, y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ car le système

$$\begin{cases} -3x-2y=-1 \\ x-3y=0 \\ 5x+4y=-1 \end{cases}$$ n'a pas de solution.

A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. C (0 ; – 2 ; 3) est un point et $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ (2 ; 3 ; – 4) est un vecteur directeur de cette droite, donc l'affirmation est vraie.

4. Le point D n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$. En effet, le système $\begin{cases} -3+t+t'=1 \\ 1+2t-t'=1 \\ -1+t+4t'=-2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t'=4-t \\ 3t=4 \\ 3t=17 \end{cases}$, il n'a pas de solution.

Donc la droite (BD) n'est pas incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

84 **1. a)** $(k^2+1)\,\overrightarrow{AG_k} = k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$ donc G_k appartient au plan (ABC).

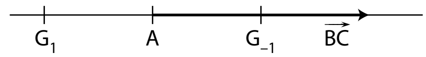
b) $(k^2+1)\,\overrightarrow{AG_k} = -k\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AG_k} = -\dfrac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	–	0	+	
f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

d) $f(k) = -\dfrac{k}{k^2+1}$ décrit l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right]$, G_k décrit le segment $[G_1G_{-1}]$ lorsque k décrit $\mathbb{R}$.



2. a) $\overrightarrow{AB}$ (– 1 ; – 1 ; – 1) et $\overrightarrow{AC}$ (– 2 ; 1 ; – 2) ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

b) La distance AG_k est minimale pour $k = 0$.

Chapitre 12

80 **1. a)** $L \in (AB)$, $(AB) \subset (AGH)$ donc $L \in (AGH)$

2. b) $L\left(\frac{3}{4}\,;0\,;0\right)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ appartiennent à $\mathcal{P}$.

3. a) $\overrightarrow{EG}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{n}(4\,;-4\,;1)$ sont respectivement normaux aux plans (FHD) et $\mathcal{P}$. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0$ donc (FHD) et P sont des plans perpendiculaires.

4. c) $C \notin (GLE)$

81 **1. Vraie** puisque $\vec{u}\,(1\,;-2\,;3)$ dirige d, $\vec{n}\,(1\,;2\,;1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

2. Fausse : $I(3\,;0\,;0)$ appartient aux trois plans.

3. Vraie : Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x+z-1=0$

4. Fausse car les vecteurs $\vec{n}\,(-1\,;3\,;-1)$ et $\vec{u}(2\,;-5\,;5)$ ne sont pas colinéaires.

82 **1. Fausse** **2. Fausse** **3. Vraie**
4. Vraie **5. Vraie**

83 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(3\,;2\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4-2=2$

b) $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5}$

c) $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$

donc $\widehat{BAC}\approx 77°$

d) $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$ donc B, A, C ne sont pas alignés.

2. Les coordonnées de $A(-2\,;0\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(-2\,;2\,;2)$ vérifient :

$$2x-y+2z+2=0$$

3. $\vec{n}_1\,(1\,;1\,;-3)$ et $\vec{n}_2\,(1\,;-2\,;6)$ sont respectivement normaux aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Pour tout nombre réel t, les coordonnées du point $M(-2\,;-1+3t\,;t)$ vérifient les deux équations :
$x+y-3z+3=0$ et $x-2y+6z=0$ donc :

$$\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

est bien une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

4. On résout le système :

$$\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\\ z=t\\ 2x-y+2z+2=0\end{cases}$$

et on obtient les coordonnées $(-2\,;-4\,;-1)$ du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et (ABC).

5. a) Si $\Omega(1\,;-3\,;1)$, $R=3$ et $M(x\,;y\,;z)$ alors $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$ équivaut à $\Omega M=3$.
$\mathcal{S}$ est donc la sphère de centre Ω et de rayon 3.

b) On résout le système :

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9\\ x=-2\\ z=t\\ y=-1+3t\end{cases}$$

On obtient $(3t+2)^2+(t-1)^2=0$ qui n'a pas de solution réelle.

c) Le point $\Omega'(-1\,;-2\,;-1)$ est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).
Ce point Ω' appartient à la sphère $\mathcal{S}$ donc (ABC) est tangent à $\mathcal{S}$ en Ω'.

84 **Partie A**

$\Rightarrow$ Si (EC) et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, alors :

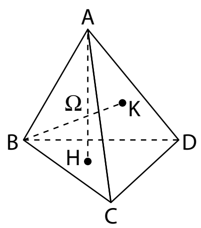
$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

puisque A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$.

$\Leftarrow$ Si M et N sont deux points quelconques du plan (ABC), alors $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. Si $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ alors $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EC}\cdot(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC})$

$$=\alpha\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

Partie B



K est le projeté orthogonal du point B sur le plan (ACD).
Supposons que (BK) et (AH) sécantes en Ω, alors $(A\Omega)\perp(CD)$ et $(B\Omega)\perp(CD)$ donc $(CD)\perp(AB\Omega)$ donc $(BH)\perp(CD)$.

Partie C

1. a) Les coordonnées $(-6\,;1\,;1)$, $(4\,;-3\,;3)$ et $(-1\,;-5\,;-1)$ des points B, C, D vérifient :

$$-2x-3y+4z-13=0.$$

b) Si $H(x\,;y\,;z)$ alors $-2x-3y+4z-13=0$ et
$\begin{cases}x=-2t+3\\ y=-3t+2\\ z=4t-1\end{cases}$ d'où $t=1$ et $H(1\,;-1\,;3)$.

c) $\overrightarrow{BH}(7\,;-2\,;2)$, $\overrightarrow{CD}(-5\,;-2\,;-4)$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=-39$.

d) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}\neq 0$ donc ABCD n'est pas orthocentrique.

2. Les quatre hauteurs du tétraèdre OIJK passent par O, donc OIJK est orthocentrique.

85 **1. a)** Les coordonnées $(1\,;3\,;2)$ ne vérifient pas l'équation $3x+y-z-1=0$, donc C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

b) Pour tout nombre réel t, $3(-t+1)+2t-(-t+2)-1=0$ donc la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. a) $\vec{u}(-1\,;2\,;-1)$ dirige $\mathcal{D}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{Q}$.

M(x ; y ; z) appartient à $\mathcal{Q}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-1) + (y-3)2 + (z-2)(-1) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2y - z - 3 = 0$

b) Les coordonnées du point I vérifient le système :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \\ -x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

donc $t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0$, $t = 1$ et I(0 ; 2 ; 1).

c) $\overrightarrow{CI}(-1 ; -1 ; -1)$ donc CI = $\sqrt{3}$.

3. a) $\overrightarrow{CM_t}(-t ; 2t-3 ; -t)$ donc :

$$\overrightarrow{CM_t}^2 = (-t)^2 + (2t-3)^2 + (-t)^2 = 6t^2 - 12t + 9$$

admet S(1 ; 3) pour sommet, elle est tournée vers le haut donc, elle admet 3 pour minimum.

On en déduit que CI = $\sqrt{3}$ est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Chapitre 13

43 **1. d)** **2. a)** **3. c)** **4. a)**

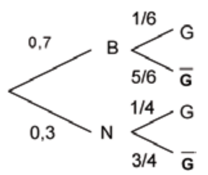
44 **1. Vrai** **2. Faux** **3. Vrai**
4. Faux **5. Vrai** **6. Faux**

45 **1.** Le nombre de boules noires tirées suit la loi $\mathcal{B}(5\,;0{,}3)$.

$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2.$

Or $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$ donc l'affirmation est vraie.

2.

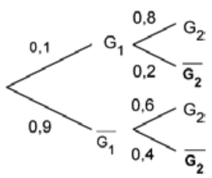


$P(G)=\frac{0{,}7}{6}+\frac{0{,}3}{4}=\frac{2{,}3}{12}$

$P_G(B)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{0{,}7\times\frac{1}{6}}{2{,}3\times\frac{1}{12}}=\frac{14}{23}$

L'affirmation est vraie.

46

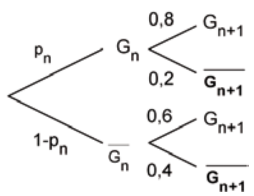


1. $p_2=P(G_1\cap G_2)+P(\overline{G_1}\cap G_2)$
$=P(G_1)\times P_{G_1}(G_2)+P(\overline{G_1})\times P_{\overline{G_1}}(G_2)$
$=0{,}1\times 0{,}8+0{,}9\times 0{,}6=0{,}62$

2. $P_{G_2}(\overline{G_1})=\frac{P(G_2\cap\overline{G_1})}{P(G_2)}=\frac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}62}=\frac{54}{62}=\frac{27}{31}\approx 0{,}871$

3. L'événement contraire est « Perdre les 3 parties » donc la probabilité cherchée est $1-0{,}9\times 0{,}4\times 0{,}4=0{,}856$

4.



$p_{n+1}=0{,}8p_n+0{,}6(1-p_n)$
$p_{n+1}=0{,}2p_n+0{,}6$
$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n=\frac{3}{5}$

5. En programmant la suite récurrente on trouve, à partir du rang 16, toujours 0,75. On peut donc conjecturer que (p_n) converge vers $\frac{3}{4}$.

6. On pose $u_n=p_n-\frac{3}{4}$

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{5}p_n-\frac{3}{20}=\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{5}u_n$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1=p_1-\frac{3}{4}=-0{,}65$.

Donc $u_n=-0{,}65\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-5\times 0{,}65\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$
$=-\frac{13}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Donc $p_n=u_n+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ pour tout $n\geqslant 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{3}{4}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

Remarque : on peut aussi utiliser un raisonnement par récurrence.

7. $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$ équivaut à $\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n<10^{-7}$

ce qui équivaut à $5^n>\frac{13\times 10^7}{4}$

c'est-à-dire $n>\frac{\ln\left(\frac{13\times 10^7}{4}\right)}{\ln 5}$.

Cette condition est réalisée pour tous les entiers $n\geqslant 11$.

47 **a)** $P_{U_1}(G)=\frac{1}{4}$, $P_{U_3}(G)=\frac{3}{8}$ donc $P_{U_1}(G)=\frac{2}{3}P_{U_3}(G)$

b) $P(G)=P(U_1)\times P_{U_1}(G)+P(U_2)\times P_{U_2}(G)$
$+P(U_3)\times P_{U_3}(G)+P(U_4)\times P_{U_4}(G)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{8}+0\right)=\frac{1}{4}\frac{6+8+9}{24}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{23}{24}\approx 0{,}24$$

c) $P_{U_2}(G)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$P_G(U_2)=\frac{P(G\cap U_2)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{23}{96}}=\frac{96}{12\times 23}=\frac{8}{23}$$

donc $P_{U_2}(G)\neq P_G(U_2)$

48 **1. a)** A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$.

b) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)$ car A et B sont indépendants,
$P(\overline{A}\cap B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\overline{A})$,
ce qui montre que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2. a) H : « Il est à l'heure »

$P(H) = 1 - P(R \cup S) = 1 - [P(R) + P(S) - P(R \cap S)]$
$= 1 - P(R) - P(S) + P(R) \times P(S)$
$= 1 - 0{,}1 - 0{,}05 + 0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}855$

2. b) On cherche $P(X \geqslant 4)$ lorsque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; 0{,}9)$.

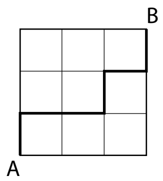
$P(X = 4) = \binom{5}{4} 0{,}9^4 \times 0{,}1 \approx 0{,}328$

$P(X = 5) = 0{,}9^5 \approx 0{,}590$

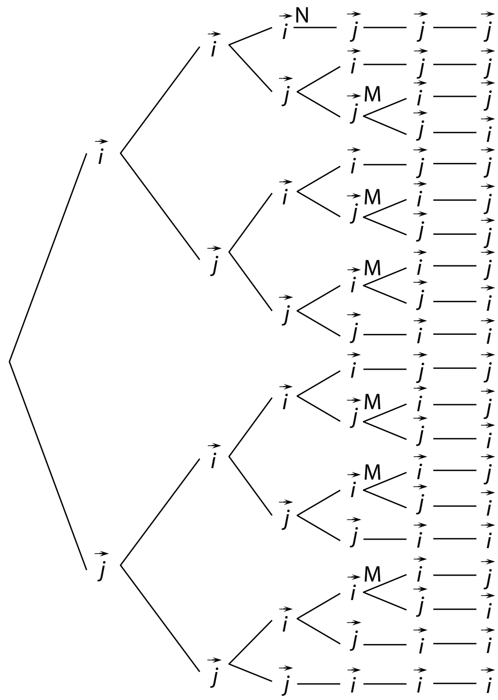
donc $P(X \geqslant 4) \approx 0{,}919$.

49 **1.** L'algorithme affiche les positions (C, L) successives en ajoutant aléatoirement 1 à C ou L jusqu'à ce que les deux soient égaux à 3. On peut considérer que C est l'abscisse et L l'ordonnée.

2.



3.



Il y a 20 chemins allant de A à B.

6 passent par M, donc la probabilité de choisir un chemin passant par M est $\frac{6}{20} = 0,3$.

De même, la probabilité qu'il passe par N est $\frac{1}{20} = 0,05$.

Chapitre 14

55 **1. b)**
2. a)
3. b)
4. a)
5. b)

56 **1. a)** Vrai **b)** Vrai
2. a) Faux **b)** Faux

57 **1. Vrai** : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ (formule du cours)

2. Faux : $P(X \leqslant c) = \dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2}$

3. Faux : $P(X = t) = 0$ puisque X appartient à un intervalle de longueur nulle.

4. Vrai : $P(X \leqslant 2) = \dfrac{2-a}{b-a}$

Alors $\dfrac{2-a}{b-a} = \dfrac{1}{4}$ donc $b + 3a = 8$

5. Vrai : $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{3}{b-a}$ donc si $a = b - 5$, $\dfrac{3}{b-a} = \dfrac{3}{5}$

58 **A. 1.** $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \end{pmatrix} 0{,}02^2 \times 0{,}98^{48} \approx 0{,}185\,8$

2. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}635\,8$

3. $E(X) = np = 50 \times 0{,}02 = 1$

B. 1. a) $P(T_1 \geqslant 1\,000) = e^{-1\,000 \times 5 \times 10^{-4}} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}61$

b) $P(T_2 \geqslant 1\,000) = e^{-1\,000 \times 10^{-4}} = e^{-0{,}1} \approx 0{,}90$

2. $P_{(T_2 \geqslant 1\,500)}(T_2 \geqslant 2\,000) = \dfrac{e^{-2000 \times 10^{-4}}}{e^{-1500 \times 10^{-4}}} = e^{-500 \times 10^{-4}}$
$= e^{-0{,}05} \approx 0{,}951\,2$

3. On note D l'événement « Le composant est défectueux ».

$P(T > t) = P(D) \times P_D(T > t) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T > t)$
$= 0{,}02 \times e^{-5 \times 10^{-4} t} + 0{,}98 \times e^{-10^{-4} t}$

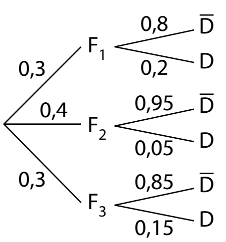
4. $P_{(T > 1\,000)}(D) = \dfrac{P((T > 1000) \cap D)}{P(T > 1000)}$

or $P((T > 1\,000) \cap D) = P(D) \times P_D(T > 1\,000)$
$= P(D) \times P(T_1 > 1\,000) = 0{,}02 \times e^{-0{,}5}$

et $P(T > 1\,000) = 0{,}02 \times e^{-0{,}5} + 0{,}98 \times e^{-0{,}1}$

Donc $P_{(T > 1\,000)}(D) \approx 0{,}013\,5$

59 **1. a)**



F_1, F_2, F_3 forment une partition de l'univers, donc :

$P(\overline{D}) = P(F_1 \cap \overline{D}) + P(F_2 \cap \overline{D}) + P(F_3 \cap \overline{D})$
$= 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}85$
$= 0{,}24 + 0{,}38 + 0{,}255 = 0{,}875$

b) $P_{\overline{D}}(F_2) = \dfrac{P(F_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}95}{0{,}875} = \dfrac{0{,}38}{0{,}875} \approx 0{,}434\,3$

2. Le nombre de pneus présentant un défaut suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}125)$.

$P(X = 0) + P(X = 1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0{,}875^{10}$
$+ \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \times 0{,}875^{9} \times 0{,}125 \approx 0{,}638\,9$

3. a) $P(500 < X < 1\,000) = \int_{500}^{1\,000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1\,000}$
$= -e^{-1\,000\lambda} + e^{-500\lambda}$

b) $e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = 0{,}25$ équivaut à $X^2 - X + 0{,}25 = 0$ avec $X = e^{-500\lambda}$ donc $X = 0{,}5$.

$e^{-500\lambda} = 0{,}5$ pour $\lambda = -\dfrac{\ln(05)}{500} = \dfrac{\ln 2}{500} \approx 0{,}001\,4$

60 **1. a)** $E(X) = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$

b) Lors d'un grand nombre de répétitions, on peut espérer que la moyenne des valeurs obtenues est proche de 0,5.

2. a) S est la somme de 1 000 nombres choisis au hasard dans [0 ;1[et on affiche la moyenne de ces 1 000 nombres.

b) D'après **1.**, on doit trouver environ 0,5.

c)

```
:0→S
:0→I
:While I<1000
:rand→X
:S+X→S
:I+1→I
:End
:Disp S/1000
```

61 **A.** Le nombre d'ordinateurs défectueux est une variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{B}\left(25\,;\,\dfrac{3}{25}\right)$.

$P(Y = 2) = \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\dfrac{22}{25}\right)^{23} \times \left(\dfrac{3}{25}\right)^{2} \approx 0{,}228$

B. 1. $1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}4$ donc $e^{-5\lambda} = 0{,}4$

d'où $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}4}{5} \approx 0{,}183$

2. $P_{(X > 3)}(X > 5) = \dfrac{P(X > 5)}{P(X > 3)} = \dfrac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}36} \approx 0{,}698$

3. a) Le nombre d'ordinateurs ayant une durée de vie supérieure à 5 ans est une variable aléatoire Z qui suit la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}4)$.

$1 - P(Z = 0) = 1 - 0{,}6^{10} \approx 0{,}994$

b) $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}999$ pour $n \geqslant -\dfrac{\ln(0{,}001)}{0{,}6}$ or $-\dfrac{\ln(0{,}001)}{0{,}6} \approx 11{,}5$. Il faut donc au moins 12 ordinateurs.

Chapitre 15

56 **2. b)** Ceci est dû à la symétrie de la courbe représentative de la fonction densité.

3. c) $P(0 < X < 1{,}96) = \frac{1}{2} P(-1{,}96 < X < 1{,}96)$

4. a) On sait que pour une loi continue, la probabilité de prendre une valeur précise est nulle.

57 **1. a)** Vrai, a doit être l'écart-type de X, soit $\sqrt{1\,000 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{240} = 4\sqrt{5}$

b) Faux, c'est seulement une approximation.

2. a) Faux, $P(-2\sigma \leqslant Y \leqslant 2\sigma) \approx 0{,}95$

b) Faux, $P(-3\sigma \leqslant Y \leqslant 3\sigma) \approx 0{,}997$

donc $P(Y \geqslant 3\sigma) \approx \frac{1-0{,}997}{2} = 0{,}001\,5$

c) Faux, $P(-\sigma \leqslant Y \leqslant \sigma) \approx 0{,}65$ donc :

$$P(Y \leqslant -\sigma) \approx \frac{1-0{,}65}{2} \approx 0{,}175$$

58 **1. a) Faux.** La densité prend son maximum en μ donc $\mu_1 = \mu_2$

b) Faux. La courbe de *f* est d'autant plus « ouverte » que σ est grand.

c) Faux. La probabilité correspond à l'aire sous la courbe donc $P(-1{,}2 \leqslant X \leqslant 1{,}2) \geqslant P(-1{,}2 \leqslant Y \leqslant 1{,}2)$

2. a) Faux (voir **1.**) $\mu_2 > \mu_1$

b) Faux $\sigma_1 = \sigma_2$, les courbes sont superposables.

c) Vrai car $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$ donc :

$$P(X_1 \geqslant 0) = 0{,}5 \text{ et } 0{,}5 < P(X_2 \geqslant 0)$$

59 **A. 1.** X suit $\mathcal{B}(10 ; 0{,}9)$

2. $P(X \geqslant 8)$

$= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$= \binom{10}{8} 0{,}9^8 \times 0{,}1^2 + \binom{10}{9} \times 0{,}9^9 \times 0{,}1 + \binom{10}{10} 0{,}9^{10} \times 0{,}1^0 \approx 0{,}93$$

B. 1. $P(246 \leqslant M \leqslant 254) \approx 0{,}960$

2. $P(147 \leqslant N \leqslant 153) \approx 0{,}952$

3. $P((M \in [246 ; 254]) \cap (N \in [147 ; 153]))$

$$\approx 0{,}960 \times 0{,}952 \approx 0{,}914$$

C. 1. $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}4$; $P_A(C) = 0{,}914$; $P_B(C) = 0{,}879$ d'après l'énoncé.

2. $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}6 \times 0{,}914 = 0{,}548$

$P(B \cap C) = P(B) \times P_B(C) = 0{,}4 \times 0{,}879 = 0{,}352$

3. $P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0{,}90$

La probabilité qu'une pièce, choisie au hasard dans la production totale de l'entreprise, soit conforme est 0,9.

60 **1.** $P(392{,}5 < L < 407{,}5) \approx 0{,}85$

Il y a donc 15 % de pièces défectueuses.

2. D'après le cours, $u \approx 1{,}96$.

Or $392{,}5 < L < 407{,}5$ signifie

$\frac{-7{,}5}{\sigma} < M < \frac{7{,}5}{\sigma}$ donc $\frac{7{,}5}{\sigma} = 1{,}96$ d'où $\sigma \approx 3{,}83$

3. a) $[396{,}17 ; 403{,}83]$

$P(396{,}17 < L < 403{,}83) \approx 0{,}68$ d'après le cours.

61 **a)** $1 - P(99 \leqslant X \leqslant 101) \approx 0{,}096$

b) Y suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

c) D'après le cours, $u \approx 1{,}96$.

d) $1{,}96 \leqslant Y \leqslant 1{,}96$ donne $98{,}8 \leqslant \sigma Y + \mu \leqslant 101{,}2$ donc $a = 1{,}2$.

e) $u = 2{,}58$

f) $-2{,}58 \leqslant Y \leqslant 2{,}58$ donc $98{,}5 \leqslant \sigma Y + \mu \leqslant 101{,}5$

62 **a)** $P(X \geqslant 50)$

b) X suit la loi $\mathcal{B}\left(100 ; \frac{3}{55}\right)$

$\pi = \frac{100 \times 3}{55} \approx 5{,}45$ et $\sigma = \sqrt{100 \times \frac{3}{55} \times \frac{52}{55}} \approx 2{,}27$

c) Pour *n* assez grand, la loi de $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ où X suit la loi binomiale peut être approchée par $\mathcal{N}(0 ; 1)$ (théorème de Moivre-Laplace). $X \geqslant 50$ signifie $Z \geqslant \frac{50 - 5{,}45}{2{,}27}$ c'est-à-dire $Z \geqslant 19{,}6$.

e) $P(Z \geqslant 19{,}6) \approx 8 \times 10^{-86}$ donc la probabilité de cocher au moins une bonne étoile (plus d'une fois sur deux) est 8×10^{-86}.

f) On cherche *b* tel que $P\left(Z \geqslant \frac{b - 5{,}45}{2{,}27}\right) = 0{,}5$.

Comme Z suit $\mathcal{N}(0 ; 1)$ cela donne $b = 5{,}45$.

Le plus grand nombre entier est donc $n = 5$.

Chapitre 16

24 **1. b)** **2. a)** **3. c)**

25 **1.** Faux **2.** Faux **3.** Vrai
4. Faux **5.** Faux

26 **A. a)** On a 50 répétitions d'une expérience de Bernoulli de façon indépendante $n = 50$ et $p = 0{,}02$

b) $P(X = 0) \approx 0{,}36$ et $P(X = 1) \approx 0{,}37$

c) $P(X = 2) \approx 0{,}19 \quad P(X \leqslant 2) \approx 0{,}92$

B. a) $P(548 \leqslant L_1 \leqslant 552) \approx 0{,}95$

b) $P(108 \leqslant L_2 \leqslant 112) = 0{,}95$

$P[(548 \leqslant L_1 \leqslant 552) \cap (108 \leqslant L_2 \leqslant 112)] \approx 0{,}95^2 \approx 0{,}90$

C. a) 0,94

b) $\mathrm{I} = \left[0{,}94 - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}94 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}84\ ;\ 1{,}04]$

En pratique, $\mathrm{I} = [0{,}84\ ;\ 1]$ car une fréquence ne peut pas dépasser 1.

c) Il faut $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1$ donc $\sqrt{n} \geqslant 20$ et $n \geqslant 400$

27 **a)** On doit avoir $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 5 \\ n(1-p) \geqslant 5 \end{cases}$ donc $n \geqslant 31$

b) $\mathrm{I}_1 = \left[0{,}835 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}835 \times 0{,}165}}{\sqrt{50}}\ ;\ 0{,}835 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}835 \times 0{,}165}}{\sqrt{50}}\right]$

$\mathrm{I}_1 \approx [0{,}732\ ;\ 0{,}938]$; $\mathrm{I}_2 \approx [0{,}811\ ;\ 0{,}859]$

Règle de décision : si $f \in \mathrm{I}$, on ne rejette pas l'hypothèse selon laquelle la production est dans la norme nationale, sinon on la rejette.

c) La fréquence 0,87 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation donc on rejette l'hypothèse : on peut penser que cet échantillon est de très bonne qualité.

d) $\mathrm{I}_3 \approx [0{,}832\ ;\ 0{,}838]$

La fréquence 0,82 est en dessous des fréquences de l'intervalle de fluctuation donc on rejette l'hypothèse : on peut penser que cet échantillon n'est pas d'assez bonne qualité.

28 **a)** Groupe A : $\mathrm{I}_A \approx [0{,}494\ ;\ 0{,}674]$

Groupe B : $\mathrm{I}_B \approx [0{,}42\ ;\ 0{,}602]$

b) Non car l'intersection de ces deux intervalles n'est pas vide.

On veut que $\frac{64}{125} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{73}{125} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{9}{125}$ et $\sqrt{n} > \frac{250}{9} \Leftrightarrow n \geqslant 772$.

29 **a)** $\frac{110}{200} = 0{,}55$

b) $\mathrm{I} \approx [0{,}479\ ;\ 0{,}621]$

c) Il est possible que 60 % des habitants soient intéressés donc le commerçant peut tenter de s'implanter. Cependant, le taux de 60 % est au bord de l'intervalle de confiance ce qui peut le faire hésiter.

d) On doit avoir $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}025$ d'où $n \geqslant 6\,400$.

La taille de l'échantillon rend le sondage coûteux et long.