CHAPITRE 4 Applications de la dérivation

1. Comprendre le sens de variation d'une fonction

Rappels

f est une fonction définie sur un intervalle I.

• *f* est **croissante** sur I signifie que, pour tous nombres réels *a* et *b* de I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.

• *f* est dé**croissante** sur I signifie que, pour tous nombres réels *a* et *b* de I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

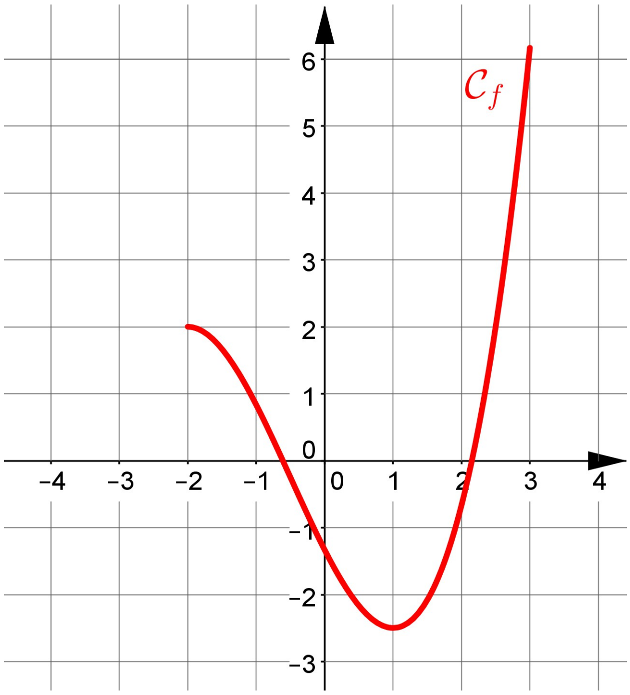
• *f* est **constante** sur I signifie que, pour tous nombres réels *a* et *b* de I, si $a \leqslant b$, alors $f(a) = f(b)$.

1. *f* est la fonction définie sur l'intervalle [-2;3], dont la courbe représentative C_f est tracée dans le repère ci-contre.

a) Reproduire cette courbe à main levée sur votre cahier.

b) Placer au hasard, sur l'axe des abscisses, deux nombres rels *a* et *b* de [-3;1] tels que $a \leqslant b$.
Placer leurs images *f(a)* et *f(b)* par *f*.
Comparer *f(a)* et *f(b)*. Que peut-on en déduire pour *f* ?

c) Reprendre la question précédente en remplaçant [-3;1] par [1;2].



2. Lire des informations sur un graphique

Rappels

A partir de la représentation graphique C_f d'une fonction *f*, on peut lire :

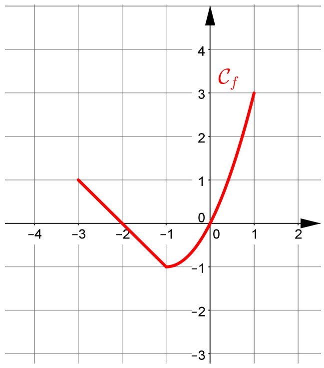
• les variations de *f* :

– soit en utilisant les rappels du 1. ci-dessus ;
– soit en parcourant la courbe de gauche à droite : si la courbe « descend », c'est que la fonction est décroissante ; si la courbe « monte », c'est que la fonction est croissante.

• le signe de *f(x)* :

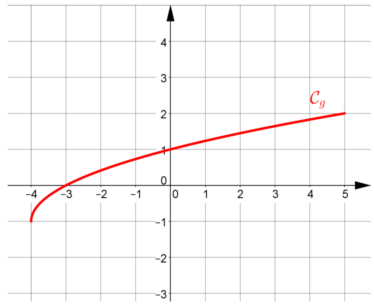
– les abscisses *x* des points de C_f situés sous l'axe des abscisses vérifient $f(x)<0$;
– les abscisses *x* des points de C_f situés au-dessus de l'axe des abscisses vérifient $f(x)>0$;
– lorsque C_f coupe l'axe des abscisses en *x*, c'est que $f(x)=0$.

2. Voici, dans un repère, la courbe représentative d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [-3;1].



a) Déterminer les variations de *f*.
b) Déterminer le signe de *f(x)* selon les valeurs de *x*.

3. Voici, dans un repère, la courbe représentative d'une fonction *g* définie sur l'intervalle [-4;5].

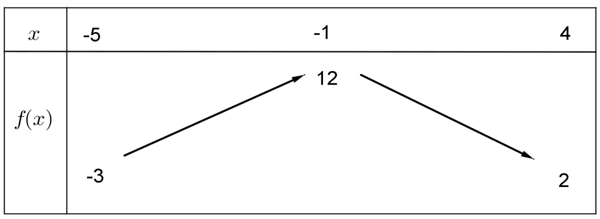


Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes :
Affirmation 1 : *g* est positive sur [-4;5].
Affirmation 2 : *g* est décroissante sur [-4;-3] ; puis sur [-3;5].

3. Déduire des informations d'un tableau de variation

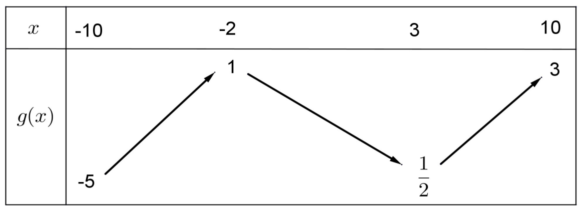
Rappels
Un tableau de variation sert à schématiser les informations importantes qui se trouvent sur la courbe représentative d'une fonction :
• La croissance (flèche ascendante) ou la décroissance (flèche descendante) ;
• Les coordonnées de points : points aux éventuelles extrémités de la courbe, points en lesquels la fonction change de variation, point correspondant au maximum ou au minimum...
On peut parfois déduire d'autres informations de ce tableau, comme, par exemple, le signe de la fonction.

4. Voici le tableau de variation d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [-5;4].



a) Lire les variations de *f* sur [-5;-1].
Comparer *f(-3,5)* et *f(-4)*.
b) Lire les variations de *f* sur [-1;4].
Comparer *f(0)* et *f(2)*.
c) *f* possède-t-elle un maximum sur [-5;4] ?

5. Voici le tableau de variation d'une fonction *g* définie sur l'intervalle [-10;10].



a) Lire :
l'image de 3 par *g* ;
un (ou les) antécédent(s) de 3 par *g*.
b) Lire le signe de *g(x)* :
sur l'intervalle [-2;3] ;
sur l'intervalle [-2;10].

4. Etudier le signe d'une expression

Rappels

Pour étudier le signe d'une expression, on utilise généralement une ou plusieurs des méthodes suivantes.

• **Signe de *ax+b*, avec *a* non nul**

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b		-	0	+	

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b		+	0	-	

• **Signe de *ax²+bx+c*, avec *a* non nul**

Δ>0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax²+bx+c		Signe de *a*	0	Opposé du signe de *a*	0	Signe de *a*	

Δ=0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax²+bx+c		Signe de *a*	0	Signe de *a*	

Δ<0

x	$-\infty$		$+\infty$
ax²+bx+c		Signe de *a*	

• **Signes évidents**

Là où elles sont définies, certaines expressions ont un signe évident, par exemple : x^2 , $(x-3)^2$, $\sqrt{(x)}$, $(2x-5)^4$, $\frac{3}{x^2}$ ...

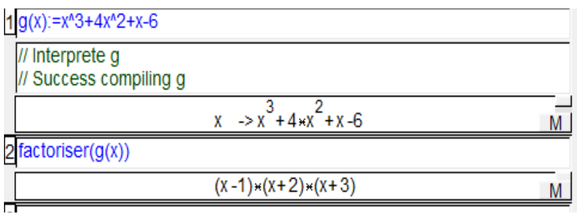
6. Donner le signe des expressions ci-dessous selon les valeurs de *x*.

a) $f(x)=-3x+7$;

b) $g(x)=5x^2+10x-15$;

c) $h(x)=(x^2+1)\frac{(x-3)}{(x^2-4)}$

7. La fonction *g* définie sur R a été saisie sur l'écran de calcul formel ci-dessous.



Donner le signe de *g(x)* selon les valeurs de *x*.

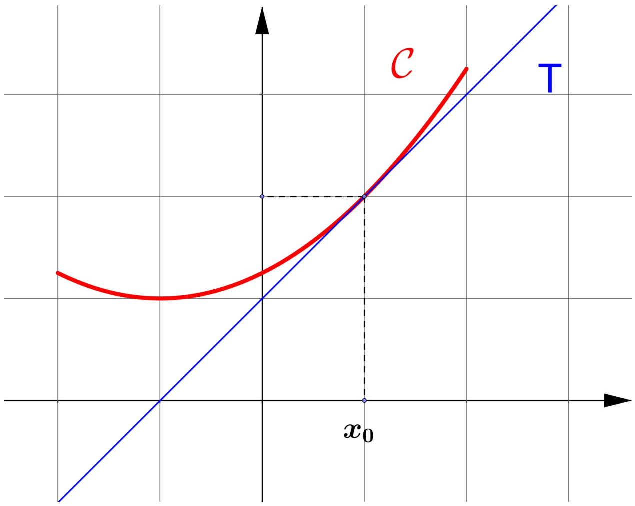
5. Lire graphiquement un nombre dérivé

Rappels

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle *I* et $x_0 \in I$. On note *C* sa courbe représentative dans un repère.

* Le nombre dérivé de *f* en x_0 est le nombre, noté $f(x_0)$, égal au coefficient directeur de la tangente *T* à *C* au point d'abscisse x_0 .

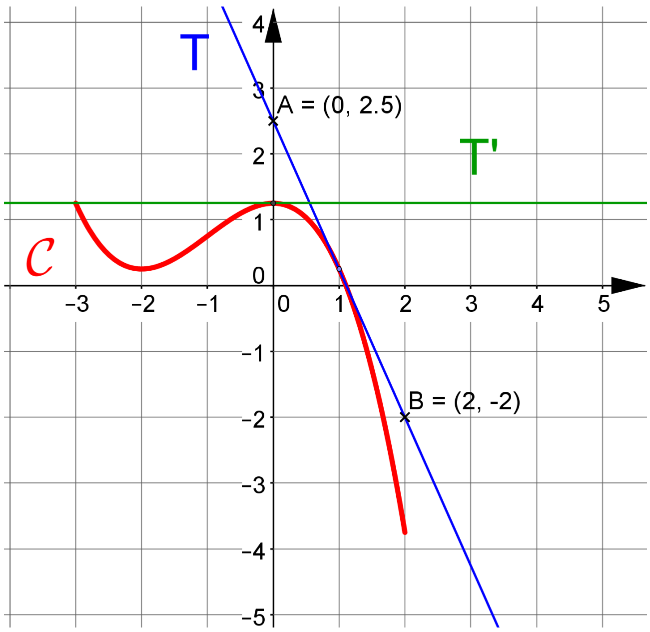
* Lorsque la tangente *T* à *C*, au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses, c'est que $f(x_0)=0$.



8. Voici, dans un repère, la courbe *C* représentative d'une fonction *f* définie sur l'intervalle [-3;2]. *T* et *T'* sont les tangentes à C aux points d'abscisses respectives 1 et 0.

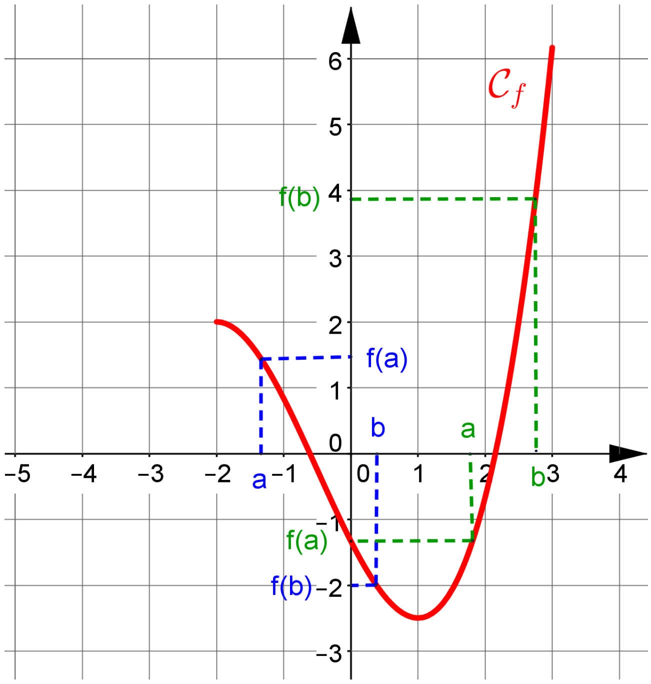
a) Calculer le coefficient directeur de la tangente *T* en utilisant les points A et B.
En déduire le nombre dérivé de *f* en 1.

b) Lire le nombre dérivé de *f* en 0.



Corrigés des exercices

1.



b) Pour $a,b\in[-2;1]$ tels que $a\leq b$, on lit $f(a)\geq f(b)$.
On en déduit que *f* est décroissante sur [-2;1].
c) Pour $a,b\in[1;3]$ tels que $a\leq b$, on lit $f(a)\leq f(b)$.
On en déduit que *f* est croissante sur [-2;1].

2. a) *f* est décroissante sur [-3;-1] et croissante sur [-1;1].
b) $f(x)\geq 0$ pour $x\in[-3;-2]$ et pour $x\in[0;1]$; $f(x)\leq 0$ pour $x\in[-2;0]$.

3. Faux : *f* est négative sur [-4;-3].
Faux : *f* est croissante sur [-4;5].

4. a) *f* est croissante sur [-5;-1]. $-3{,}5\in[-5;-1]$ et $-4\in[-5;-1]$, or $-4\leq -3{,}5$, donc $f(-4)\leq f(-3{,}5)$.
b) *f* est décroissante sur [-1;4]. $0\in[-1;4]$ et $2\in[-1;4]$, or $0\leq 2$, donc $f(0)\geq f(2)$.
c) *f* possède un maximum égal à 12 et atteint pour *x*=-1.

5. a) L'image de 3 par *g* est $\frac{1}{2}$. 10 est l'unique antécédent de 3 par *g*.

b) $g(x)\geq 0$ sur [-2;3]. $g(x)\geq 0$ sur [3;10].

6. a)

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
f(x)		+	0	-	

$f(x)\geq 0$ sur $]-\infty;\frac{7}{3}]$;

$f(x)\leq 0$ sur $[\frac{7}{3};+\infty[$.

b) Pour l'expression $5x^2+10x-5$, Δ=400>0, les solutions de l'équation $5x^2+10x-5=0$ sont donc $x_1=-3$ et $x_2=1$.
D'où le tableau de signes, puisque 5>0 :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$5x^2+10x-5$		+	0	-	0	+	

$g(x)\geq 0$ sur $]-\infty;-3]$ et sur $[1;+\infty[$;
$g(x)\leq 0$ sur $[-3;1]$.

c) Pour tout x de R, $x^2+1>0$, donc $h(x)$ est du signe de $\frac{(x-3)}{(x^2-4)}$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
x-3		-		-		-	0	+	
x²-4		+	0	-	0	+		+	
h(x)		-	II	+	II	-	0	+	

$h(x)\geq 0$ sur $]-2;2[$ et sur $[3;+\infty[$;
$h(x)\leq 0$ sur $]-\infty;-2[$ et sur $]2;3]$.

7.

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
x+2		-		-	0	+		+	
x+3		-	0	+		+		+	
g(x)		-	0	+	0	-	0	+	

$g(x)\geq 0$ sur $[-3;-2]$ et sur $[1;+\infty[$;
$g(x)\leq 0$ sur $]-\infty;-3]$ et sur $[-2;1]$.

8. a) Le coefficient directeur de la droite T=(AB) est : $a=\frac{(y_B-y_A)}{(x_B-x_A)}=\frac{(-2-2{,}5)}{(2-0)}=-2{,}25$.

Ainsi, $f'(-1)=-2{,}25$.
b) La tangente T' à C au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(0)=0$.