Nom : ______________________ Classe : ________

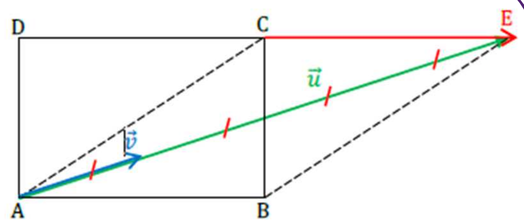
Chapitre 5 Parcours 1

Comment représenter géométriquement des vecteurs ?

Exemple : $ABCD$ est le rectangle ci-contre.

- Construire en rouge le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$

On construit le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme, ainsi $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.

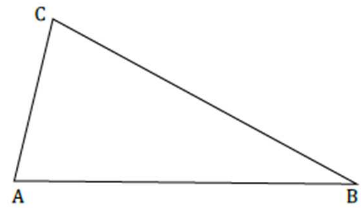


- Construire en vert le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ (d'après la relation de Charles).

- Construire en vert le représentant d'origine A du vecteur $\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{u}$.

1 ABC est le triangle représenté ci-contre.

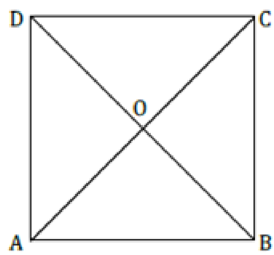


a) Construire le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

b) Compléter :

- Le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur : ....
- Le représentant d'origine D du vecteur $\overrightarrow{CA}$ est le vecteur : ....

2 $ABCD$ est le carré de centre O représenté ci-contre.

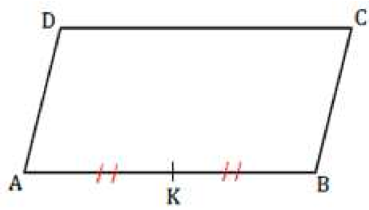


a) Construire le représentant d'origine B du vecteur $\overrightarrow{OC}$.

b) Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}$.

c) Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

3 $ABCD$ est le parallélogramme représenté ci-contre.



K est le milieu du coté $[AB]$.

a) Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{KC}$.

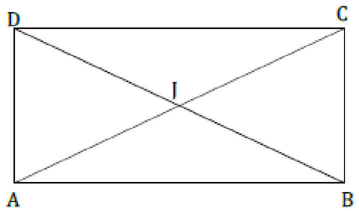
b) Compléter : $\vec{u} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{XX\ldots}\ \overrightarrow{\ldots X\ldots}$ …… .

Nom : ______________________ Classe : ________

4 ABCD est le rectangle de centre J représenté ci-contre.

a) Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

b) Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



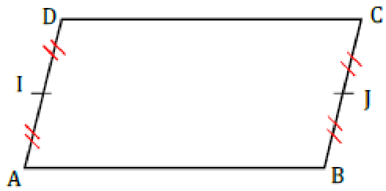
5 ABCD est le parallélogramme représenté ci-contre.

I est le milieu du coté $[\mathrm{AD}]$ et J est le milieu du côté $[\mathrm{BC}]$.

a) Construire le représentant d'origine A du vecteur

$\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CI}}$.

b) Que peut-on conjecturer ? Prouver cette conjecture.



....

....

....

6 ABC est un triangle. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

a) Construire une figure.

b) Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{IJ}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

c) Démontrer que $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Nom : ______________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 2

Comment calculer les coordonnées d'un vecteur, la norme d'un vecteur ?

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

Exemples : On donne les points $\mathrm{A}(-3\,;\,-2)$, $\mathrm{B}(4\,;\,-1)$, et $\mathrm{C}(1\,;\,4)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
- $x_B - x_A = 4-(-3) = 7$ et $y_B - y_A = -1-(-2) = 1$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(7\,;\,1)$.
- $x_C - x_A = 1-(-3) = 4$ et $y_C - y_A = 4-(-2) = 5$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(4\,;\,6)$.
- Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(7\,;\,1)$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}(2\,;\,3)$ donc $\vec{u} = (7+2\,;\,1+3)$ c'est-à-dire $\vec{u}(9\,;\,4)$.

- Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

$\vec{u}(9\,;\,4)$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{9^2+4^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$.

1 On donne les points $\mathrm{A}(4\,;\,-5)$, $\mathrm{B}(1\,;\,-3)$, $\mathrm{C}(1\,;-5)$ et $\mathrm{D}(2\,;\,7)$.

Compléter :

a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont $(\ldots - \ldots\,;\,-3-(-5))$, soit $(\ldots\,;\,2)$.

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont $(2-1\,;\,\ldots-(\ldots))$ soit $(1, \ldots)$.

c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont $(\ldots + 1\,;\,2 + \ldots)$, soit $(\ldots\,;\,\ldots)$.

d) Les coordonnées du vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont $\left(\frac{1}{3}\times 1\,;\ldots\right)$, soit $\left(\frac{1}{3}\,;\ldots\right)$.

2 On donne les vecteurs $\vec{u}(3\,;\,-4)$, $\vec{v}(-3\,;\,4)$, et $\vec{w}(-3\,;\,-4)$,

a) Compléter : La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

b) Démontrer que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

3 On donne les points $\mathrm{A}(2\,;\,1)$, $\mathrm{B}(-1\,;\,3)$ et $\mathrm{C}(4\,;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

b) Calculer les coordonnées des longueurs AB et AC.

c) Que peut-on en déduire du triangle ABC ?

Nom : ______________________ Classe : __________

4 On donne les points $A(-7\,;\,-2)$, $B(4\,;\,-2)$ et $C(6\,;\,3)$.

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) D est un point de coordonnées $(x\,;\,y)$. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ en fonction de x et y.

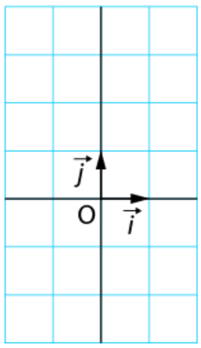
c) Que dire du quadrilatère $ABCD$ lorsque $x = -5$ et $y = 3$?

5 On donne les vecteurs $\vec{u} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v}(1\,;\,-4)$.

a) Vérifier que les coordonnées du vecteur $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$ sont $(4\,;\,-9)$.

b) Calculer la norme du vecteur $\vec{w}$.

6 λ désigne un nombre réel et on donne le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath}$.



a) Construire dans le repère ci-contre le représentant du vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

- $\lambda = 0$
- $\lambda = 1$
- $\lambda = 3$
- $\lambda = -2$

b) Exprimer la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction de λ.

c) Justifier que pour tout nombre réel λ, $\|\vec{u}\| \geq 1$.

7 On donne les vecteurs $\vec{u} = (2\,;\,3)$ et $\vec{v}(-1\,;\,m)$ où m désigne un nombre réel.

a) Déterminer $\|\vec{u}\|$ et exprimer $\|\vec{v}\|$ en fonction de m.

b) Pour quelles valeurs de m a-t-on $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$?

Nom : ______________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 3

Comment reconnaître des vecteurs colinéaires avec leurs coordonnées ?

Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemples : • Les vecteurs $\vec{u}(3\,;\,-1)$ et $\vec{v}(-6\,;\,2)$ sont-ils colinéaires ?

On calcule le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$:

$$3\times 2-(-6)\times -(1)=6-6=0$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

• Les vecteurs $\vec{l}(1\,;\,-5)$ et $\vec{p}(2\,;\,-9)$ sont-ils colinéaires ?

On calcule le déterminant du vecteur $\vec{l}$ et du vecteur $\vec{p}$:

$$1\times(-9)-2\times(-5)=-9+10=1$$

Le déterminant est non nul, donc les vecteurs $\vec{l}$ et $\vec{p}$ ne sont pas colinéaires.

1 Dans chaque cas, calculer le déterminant d du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ et en déduire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non.

a) $\vec{u}(-1\,;\,2)$, $\vec{v}(4\,;\,-8)$ $\quad d=(-1)\times(-8)-4\times 2=$.... $\quad\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....

b) $\vec{u}(4\,;\,6)$, $\vec{v}\left(-1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ $\quad d=$ ....

c) $\vec{u}(7\,;\,1)$, $\vec{v}\left(\frac{7}{2}\,;\,2\right)$ $\quad d=$ ....

d) $\vec{u}(-8\,;\,-6)$, $\vec{v}\left(\frac{4}{3}\,;\,1\right)$ $\quad d=$ ....

2 Dans chaque cas, écrire le tableau des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, reconnaître un tableau de proportionnalité et en déduire une relation de colinéarité.

a) $\vec{u}(6\,;\,-1)$, $\vec{v}\left(3\,;\,-\frac{1}{2}\right)$

6	-1
3	$-\frac{1}{2}$

$\times\frac{1}{2}$

$\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$

b) $\vec{u}(6\,;\,-9)$, $\vec{v}(4\,;\,-6)$

....	....
....	....

$\times$....

....

c) $\vec{u}(-16\,;2)$, $\vec{v}\left(-12\,;\frac{3}{2}\right)$

....	....
....	....

$\times$....

....

d) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}\,;\frac{2}{15}\right)$, $\vec{v}\left(-1\,;-\frac{2}{3}\right)$

....	....
....	....

$\times$....

....

Nom : ____________________ Classe : __________

3 On donne le vecteur $\vec{u}(-2\,;\,3)$. Dans chaque cas, le vecteur proposé est colinéaire au vecteur $\vec{u}$, compléter ses coordonnées.

a) $\vec{v}(1\,;\ldots)$ **b)** $\vec{w}(\ldots;\,-3)$ **c)** $\vec{l}(\ldots;\,9)$ **d)** $\vec{p}\left(-\frac{1}{2}\,;\ldots\right)$

4 Voici quatre vecteurs $\vec{u}(4\,;1)$, $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}\,;\,2\right)$, $\vec{w}\left(2\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{l}\left(-1\,;\,-\frac{1}{4}\right)$.

Déterminer toutes les relations de colinéarité qui existent entre ces vecteurs.

5 On donne les vecteurs $\vec{u}\left(-7\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}(4\,;m)$ où m désigne un nombre réel.

a) Exprimer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ en fonction de m.

b) Pour quelle valeur de m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

6 On donne les vecteurs $\vec{u}=\left(1+\sqrt{3}\right)\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-2\vec{\imath}+\left(1-\sqrt{3}\right)\vec{\jmath}$.

a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Qu'en déduit-on pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Nom : ____________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 4

Comment caractériser alignement et parallélisme avec la colinéarité des vecteurs ?

Exemple : Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;\,0)$, $B\left(1\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $C(-6\,;\,-2)$.

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Pour le savoir, on étudie la colinéarité, par exemple des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(1-(-2)\,;\,\frac{3}{2}-0\right)$, soit $\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

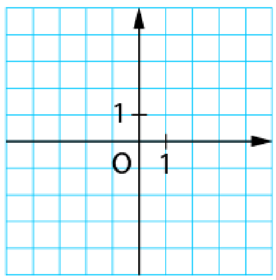
$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-6-(-2)\,;-2-0)$, soit $(-4\,;\,-2)$.

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$3\times(-2)-(-4)\times\frac{3}{2}=-6+6=0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires **et les points A, B, C sont alignés.**

1 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(0\,;2)$, $B(4\,;\,4)$, $C(-4\,;\,-4)$ et $D(4\,;\,0)$.



a) Placer ces points dans le repère ci-contre.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

....

....

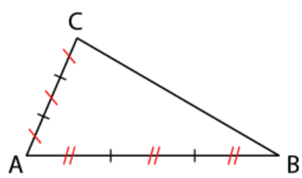
c) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

....

d) Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

....

2 ABC est le triangle représenté ci-contre.



M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

a) Construire le point M.

b) Pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, compléter :

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{...M}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\cdots=\overrightarrow{BA}\ldots\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

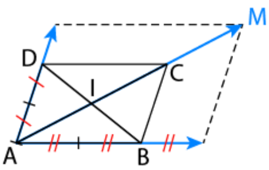
Nom : ____________________ Classe : __________

$$\overrightarrow{BM}=\cdots\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\cdots\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\cdots\overrightarrow{BC}$$

c) Que peut-on en déduire pour les points B, C, M ?

....

3 $ABCD$ est le parallélogramme de centre I représenté ci-contre.



M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) Pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, compléter :

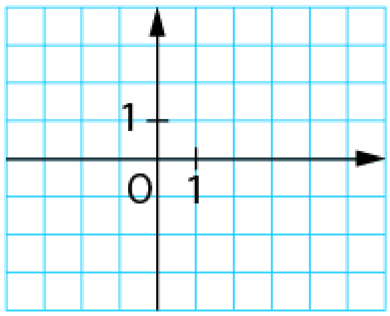
$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{\dots}+\overrightarrow{\dots}\right) \qquad \overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\dots}=\frac{3}{2}\times 2\overrightarrow{A\dots}=\cdots\overrightarrow{AI}$$

b) Que peut-on en déduire pour les points A, I et M ?

....

4 **a)** Dans le repère orthonormé ci-contre, placer les points $A(-3\,;1)$; $B(2\,;1)$, $C(-1\,;1)$ et $D(5\,;-2)$.

b) Observer et démontrer une propriété du parallélisme.



....

....

....

5 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\,;7)$; $B(8\,;-2)$, $C(-4\,;-2)$ et le vecteur $\vec{u}(2\,;\,5)$. À tout nombre réel λ, on associe le point M tel que $\overrightarrow{CM}=\lambda\vec{u}$.

Pour quelle valeur de λ le point M appartient-il à la droite (AB) ?

....

....

6 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A\left(-1\,;\,\frac{5}{2}\right)$; $B(2\,;-2)$, $C(3\,;0)$.

$M(x\,;y)$ est un point du plan (x et y désignent des nombres réels).

Pour quelles valeurs de x et y les droites (AB) et (CM) sont-elles parallèles ?

....

....