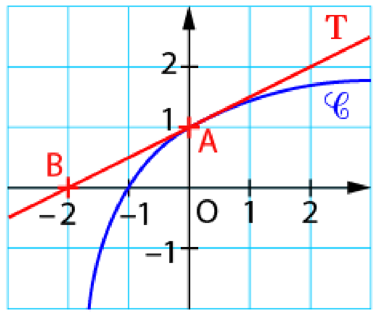
Nom : ______________________ Classe : __________

Chapitre 4 Parcours 1

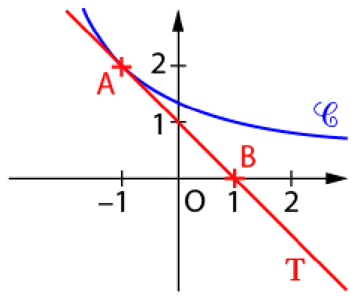
Comment déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

Exemple : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthonormé, on a tracé sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 0.



La droite T passe par les points $\mathrm{A}(0\,;1)$ et $\mathrm{B}(-2\,;0)$, sa pente est donc $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{(-2)-0}=\frac{1}{2}$. Le nombre dérivé de f en 0 est égal à la pente de la tangente T, ainsi $f'(0)=\frac{1}{2}$.

1 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A d'abscisse -1.



a) Compléter :

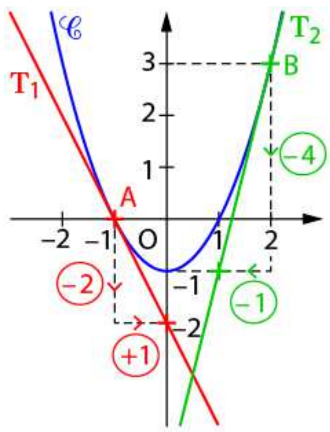
- La droite T passe par les points A(...... ; ......) et B(...... ; ......).
- La pente de la tangente T est $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\text{.....}-\text{.....}}{\text{.....}-(\text{.....})}=\frac{\text{.....}}{\text{.....}}=$ ....

b) En déduire le nombre dérivé de la fonction g en -1.

....

....

2 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes respectives T_1 et T_2. En A d'abscisse -1 et B d'abscisse 2.
Compléter :

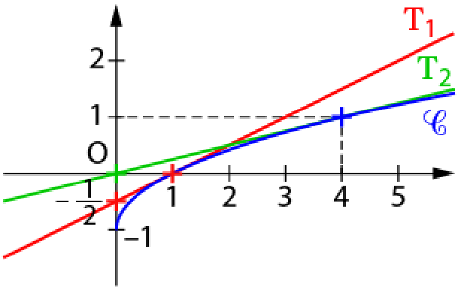


a) On lit sur le graphique la pente de la tangente T_1 : $\frac{-2}{1}=-2$. La pente de la tangente T_2 est : $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}=$ ....

b) On en déduit que $f'(-1)=-2$ et ...... = ...

Nom : ________________________________ Classe : __________

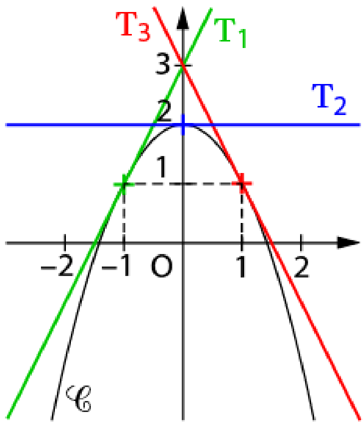
3 f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$. Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative C de la fonction f et ses tangentes respectives T_1 et T_2 aux points de C d'abscisses 1 et 4.



a) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Déterminer $f(4)$ et $f'(4)$.

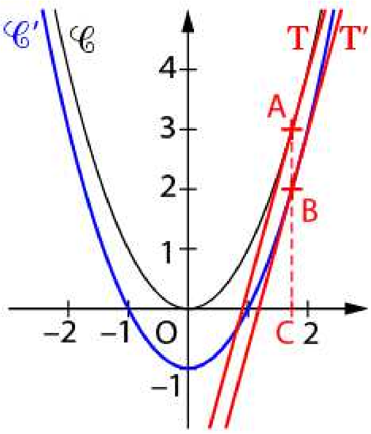
4 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes respectives T_1, T_2 et T_3 aux points d'abscisses -1, 0 et 1. Compléter :



- $g'(-1) =$ ......
- $g'(0) =$ ......
- $g'(1) =$ ......

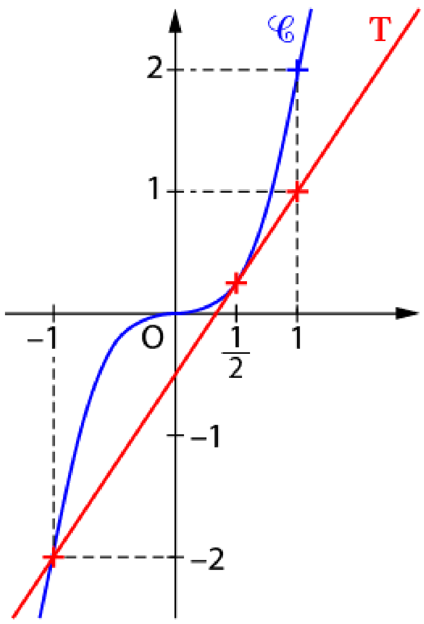
5 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, C et C' sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g. Pour tout nombre réel C, les tangentes respectives T et T' à C et C' aux points A et B de même abscisse C sont parallèles.

Que peut-on en déduire pour es fonctions f et g ? Expliquer.



Nom : ______________________________ Classe : __________

6 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative C d'une fonction f définie sur $[-1\,;1]$ et la tangente T à C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. D'autre part, la tangente à C au point 0 est l'axe des abscisses.



Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par « Vrai » ou « Faux ».

- Il existe un nombre réel c de $[-1\,;1]$ tel que $f'(c) = \frac{3}{2}$. ....
- Il existe un nombre réel c de $[-1\,;1]$ tel que $f'(c) = -\frac{3}{2}$. ....
- Il existe un nombre réel c de $[-1\,;1]$ tel que $f'(c) = 0$. ....

Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 4 Parcours 2

Comment déterminer l'équation d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction ?

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(n) = 2n^2 - 1$. Dans un repère orthonormé, C est sa courbe représentative.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 2.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2 \times 2x = 4x$ donc $f'(2) = 8$. D'autre part, $f(2) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$.
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe C au point A est :
$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit $y = 8(x - 2) + 7$, c'est-à-dire $y = 8x - 9$.

1 g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(1) = 4$ et $g'(1) = 3$. Dans un repère orthonormé, T est la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

a) Compléter.

Une équation de la tangente T est $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ soit $y = \ldots..(x - 1) + \ldots..$

b) Réduire l'équation de T.

....

....

2 f est une fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x} + 1$. Dans un repère orthonormé, T est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

On se propose de déterminer une équation de la tangente T.

a) Vérifier par un calcul le résultat obtenu à l'écran de la calculatrice :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3 \div x + 1)\Big|_{x=-1}$$

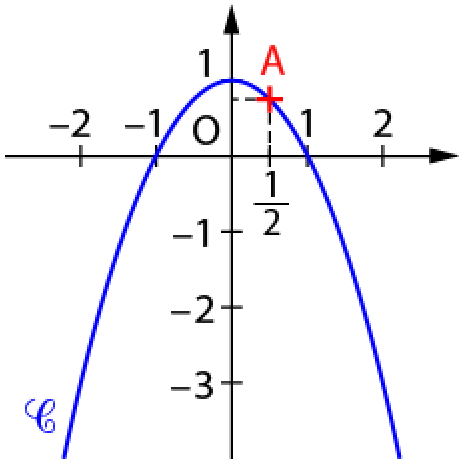
$$-3$$

b) Déterminer $f(-1)$.

c) Écrire alors une équation de T, puis la réduire.

Nom : ______________________ Classe : ________

3 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 1$. Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative C de la fonction g.

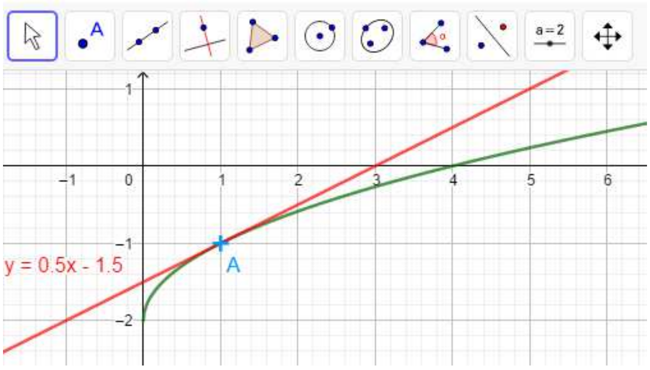


a) Déterminer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Tracer dans le repère ci-contre la tangente T à l'aide de deux de ses points.

4 Avec un logiciel de géométrie, on a tracé la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -2 + \sqrt{x}$ et la tangente à cette courbe au point A d'abscisse 1. Justifier l'équation affichée par le logiciel.



....

....

5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. C est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) a désigne un nombre réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse a.

b) Déterminer les deux tangentes à la courbe C qui passent par le point $\mathrm{I}(1\,;0)$.

6 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

C est la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

Nom : ______________________________ Classe : __________

a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

b) Démontrer que la courbe C est au-dessus de la tangente T.

Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 4
Parcours 3

Comment définir la dérivée d'une fonction de la forme $u + v$ ou uv ou u^2 ?

Exemple : u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -2x + 1$ et $v = x^2 - 3x$. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) u et v **b)** $f = uv$ **c)** $g = u^2$

a) u est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $l : x \mapsto -2x$ et $m : x \mapsto 1$. u est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel x, $u'(x) = l'(x) + m'(x) = -2$. v est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $n : x \mapsto x^2$ et $p : x \mapsto -3x$. v est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $v'(x) = n'(x) + p'(x) = 2x - 3$.

b) f est le produit des fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $u(x) = -2x + 1$; $u'(x) = -2$; $v(x) = x^2 - 3x$; $v'(x) = 2x - 3$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2(x^2 - 3x) + (-2x + 1)(2x - 3)$$
$$= -6x^2 + 14x - 3.$$

c) u est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $g'(x) = 2u(x)u'(x) = 2(-2x + 1) \times (-2) = -4(-2x + 1)$.

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 + x^2 - 7x + 1$.

a) f est la somme de quatre fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Préciser ces fonctions.

....

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

....

....

....

2 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 1$ et $v = \frac{x-1}{2}$.

a) Compléter : Pour tout nombre réel x :

- $u(x) =$ ....
- $u'(x) =$ ....
- $v(x) =$ ....
- $v'(x) =$ ....

Nom : ______________________________ Classe : ________

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $(uv)'(x) = \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.

....

....

c) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $(u^2)'(x) = 12x(3x^2 + 1)$.

....

....

3 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (-3x + 1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

a) La fonction f est de la forme uv. Quelles sont les fonction u et v ?

....

b) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions u et v.

....

....

c) En déduire la dérivée de la fonction x.

....

....

....

4 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x^2 + 7x - 2)^2$.

a) La fonction g est de la forme u^2. Quelle est la fonction u ? ....

b) Déterminer la dérivée de la fonction u. ....

c) En déduire la dérivée de la fonction g.

....

....

Nom : ______________________________ Classe : __________

5 Ci-contre, voici une copie d'écran d'un logiciel de calcul formel.

1	Dérivée$\left((x^2+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$
	$\rightarrow\ 2\,x\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2+1}{x^2}$
2	Développer$\left(2x\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2+1}{x^2}\right)$
	$\rightarrow\ \frac{2\,x^3+x^2-1}{x^2}$

a) Justifier le résultat affiché à la ligne 1.

....

....

....

....

b) Vérifier le calcul effectué à la ligne 2.

....

....

6 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, $f'(x)=\frac{8x^4-2}{x^3}$.

Nom : ______________________ Classe : ________

Chapitre 4 Parcours 4

Comment déterminer la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{u}{v}$ ou $x \mapsto g(ax+b)$?

Exemple :

a) f_1 est la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f_1(x)=\frac{5x+4}{x-1}$. Déterminer la dérivée de la fonction f_1.

b) f_2 est la fonction définie sur $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ par $f_2(x)=\sqrt{3x-2}$. Démontrer que f_2 est dérivable sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$. Déterminer $f_2{}'(x)$ pour tout nombre réel $x>\frac{2}{3}$.

a) f_1 est le quotient de deux fonctions $u : x \mapsto 5x+4$ et $v : x \mapsto x-1$ dérivables sur $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. f_1 est donc dérivable sur chacun de ces intervalles.

Pour tout nombre réel $x \neq 1$, $u(x)=5x+4$; $u'(x)=5$; $v(x)=x-1$; $v'(x)=1$.

Ainsi, $f_1'(x)2=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{(v(x))^2}=\frac{5(x-1)-(5x+4)}{(x-1)^2}=\frac{-9}{(x-1)^2}$.

b) Pour $x>\frac{2}{3}$, $f_2(x)=g(3x-2)$ où g est la fonction racine carrée. g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. f_2 est donc dérivable en tout réel x tel que $3x-2>0$, c'est-à-dire f_2 est dérivable sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

Pour $x>\frac{2}{3}$, $f_2'(x)=3g'(3x-2)=3\times\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

1 u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$ et $v(x)=x+3$.

a) Compléter : Pour tout nombre réel x :

- $u(x)=$ ....
- $u'(x)=$ ....
- $v(x)=$ ....
- $v'(x)=$ ....

b) Démontrer que, pour tout nombre réel $x \neq -3$, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{x^2-6x+1}{(x+3)^2}$.

....

....

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x+1)^5$.

a) Compléter : Pour tout nombre réel x, $f(x)=g(.....)$ où $g(x)=x^5$.

Nom : ______________________________ Classe : __________

b) Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. ....

c) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 15(3x+1)^4$.

....

....

3 g est la fonction définie sur $]-\infty\,;5[\cup]5\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^2}{x-5}$.

a) La fonction g est de la forme $\frac{u}{v}$. Quelles sont les fonctions u et v ? ....

b) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions u et v.

....

c) En déduire la dérivée de la fonction g.

....

....

....

4 f est la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

a) La fonction f est de la forme $x \mapsto g(2x-1)$. Quelle est la fonction g ?

....

....

b) Sur quel intervalle :
- la fonction g est-elle dérivable ?
- la fonction f est-elle dérivable ?

....

....

c) Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x > \frac{1}{2}$.

....

....

Nom : ______________________________ Classe : __________

5 Ci-contre, voici une copie d'écran d'un logiciel de calcul formel.

1	Dérivée$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}\right)$
	$\rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}$
2	Factoriser$\left(\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}\right)$
	$\rightarrow -\sqrt{x}\cdot\dfrac{2x-1}{2x\,(2x+1)^2}$

a) Justifier le résultat affiché à la ligne 1.

b) Vérifier le calcul effectué à la ligne 2.

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-3x)^5$. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -(3x-1)^4(18x-1)$.