Nom : ____________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 1

Comment étudier le signe d'une dérivée ?

Exemple : Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la fonction dérivée f' définie par :

$$f'(x) = -2x + 3$$

L'écriture de $f'(x)$ est celle d'une fonction affine avec $a = -2$.

$-2x + 3 = 0$ si et seulement si $x = \frac{3}{2}$.

$f'(x)$ est positive sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ et $f'(x)$ est négative sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

1

a) Entourer, parmi les expressions suivantes, celle qui est du signe de $3x - 2$?

- $(3x-2)^2$
- $(3x-2)(x+1)$
- $x^2(3x-2)$
- $\frac{x}{3x-2}$

b) Compléter son tableau de signes :

x	$-\infty$	……	$+\infty$
……		0	

2

a) Déterminer les valeurs qui annulent la fonction dérivée f' définie par :
$f'(x) = (4x+1)(3-x)$.

....

....

b) Compléter le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		.....		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	.....	0	.....	

3

a) Déterminer les nombres réels qui annulent la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = x^2 - 3x + 2$.

....

....

b) En déduire le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x.

....

Nom : ______________________________ Classe : __________

4 **a)** Entourer les dérivées qui ont un signe constant sur $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = (-x+1)^2$
- $g'(x) = 2x^2 + 5$
- $h'(x) = x(x+2)$
- $k'(x) = -3x^2 + x - 1$

b) Préciser le signe de chacune d'entre elles.

………

………

………

5 **a)** Justifier que le signe de la fonction f' définie $]-2;+\infty[$ par $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x+2)^2}$ est celui de $x^2 - 2x - 3$.

………

………

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 2

Comment étudier les variations d’une fonction?

Exemple : Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 - 0{,}5x^2 + 4x - 1$$

On détermine la dérivée de f :

$$f'(x) = -3x^2 - x + 4$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -\frac{4}{3}$ (*On peut utiliser le discriminant*).

On dresse le tableau de signes de $f'(x)$ et on déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{131}{27}$	$\nearrow$	$1{,}5$	$\searrow$	

1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 5$.

a) Étudier le signe de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Nom : ______________________________ Classe : __________

2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$.

a) Montrer que $f'(x) = 4x(x^2 - 1)$.

b) Étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f est croissante sur ....

f est décroissante sur ....

3 Une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $g'(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+1}$.

a) Pourquoi peut-on obtenir les variations de la fonction g à partir de l'étude du signe de $x^2 - 3x$?

....

b) Déterminer le sens de variations de la fonction g.

Nom : ______________________________ Classe : ________

Chapitre 5 Parcours 3

Comment résoudre un problème d'optimisation?

Exemple : Quelle est la valeur minimum du produit de deux nombres réels si leur différence est égale à 10 ?

On note x et y les deux nombres.

On sait que $x - y = 10$ (On suppose que $x > y$).

On cherche à optimiser le produit xy c'est-à-dire $x(x-10)$.

On étudie les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x$.

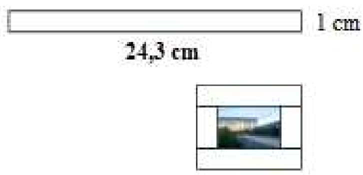
On étudie le signe de sa dérivée : $f'(x) = 2x - 10$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 5$.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-25	$\nearrow$	

La valeur minimum du produit est -25, il est obtenu pour $x = 5$ et $y = -5$.

1 Un photographe doit fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de $24{,}3$ cm de long et 1 cm de large. Chaque coupe enlève $0{,}1$ cm de matière



a) Combien de coupes le photographe doit-il faire ?

....

b) Déterminer les dimensions du cadre pour que l'aire de la photo soit maximum.

Nom : ______________________________ Classe : __________

2 **a)** Proposer trois couples de nombres réels de l'intervalle $[-27\,;-3]$ dont le produit vaut 81 et calculer leur somme.

....

....

....

b) Déterminer le couple pour lequel la somme des deux nombres est maximum.

3 Dans une entreprise, le coût moyen (en euros) de production de pièces est donnée par $\mathrm{C}(q) = q^2 - 6q + 40 + \frac{100}{q}$ où q est le nombre de pièces en milliers ($q \in \,]0; 10]$).

a) Vérifier que $\mathrm{C}'(q) = \frac{2(q-5)(q^2+2q+10)}{q^2}$.

b) En déduire la quantité qui minimise le coût moyen et préciser la valeur minimum du coût moyen.

Nom : ____________________ Classe : __________

Chapitre 5 Parcours 4

Comment déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$?

Exemple : Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = -2x^2 + 6x - 1$.

Ici, $a = -2$, $b = 6$ et $c = -1$.

L'axe de symétrie a pour équation $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-2)} = \frac{3}{2}$.

$-2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{2}$ donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$.

1 Associer à chacune des paraboles ci-dessous son axe de symétrie et son sommet S.

- $y = -x^2 + 2x + 1$
- $y = 2x^2 - 4x + 3$
- $y = 0{,}5x^2 + 3x + 2$
- $y = -x^2 - 10x - 1$

a) $x = -5$ et $S(-5; 24)$ **b)** $x = 1$ et $S(1; 2)$ **c)** $x = -3$ et $S(-3; -2{,}5)$ **d)** $x = 1$ et $S(1; 1)$

....

2 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la forme canonique est $f(x) = -3(x+1)^2 + 5$.

a) Donner l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de la parabole représentant f.

....

b) Donner la forme développée de $f(x)$ et retrouver les résultats du **a)**.

3 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la forme factorisée est $(x) = (x-2)(x+8)$.

Nom : ______________________________ Classe : __________

a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

....

....

....

b) Déterminer l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de la parabole représentant f de deux façons.

....

....

....

4 Le bénéfice (en milliers d'euros) que réalise une entreprise par la vente de x milliers d'articles ($1{,}25 \leq x \leq 17{,}5$) est donné par $\mathrm{B}(x) = -0{,}4x^2 + 0{,}5x + 8{,}75$.

a) Vérifier que le bénéfice est nul pour $12\,500$ et $17\,500$ articles vendus.

....

....

b) Déterminer le bénéfice maximum et le nombre d'articles vendus correspondants.

....

....

c) Est-il vrai que le bénéfice réalisé par l'entreprise par la vente en milliers de x articles est le même que lorsqu'elle vend $x + 9{,}375$ articles avec $1{,}25 \leq x \leq 9{,}375$? Justifier.