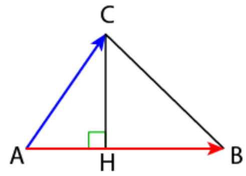
Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 9 Parcours 1

Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec un projeté orthogonal ?

Exemple : ABC est un triangle. H est le pied de la hauteur issue de C. On donne $AB = 5$ et $AH = 2$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est H, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\mathbf{AH}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\mathbf{AH}} = AB \times AH$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5 \times 2 = 10$.

1 **a)** Sur chaque figure ci-dessous, construire ou marquer le point H, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Figure 1

ABC est un triangle tracé sur un quadrillage formé de carrés.

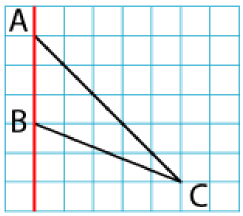


Figure 2

ABC est un triangle tracé sur un quadrillage formé de carrés.

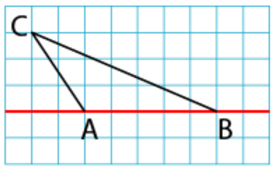


Figure 3

ABC est un triangle rectangle en A.

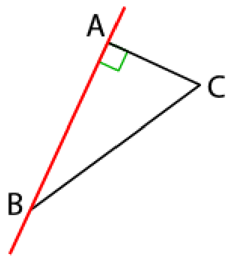
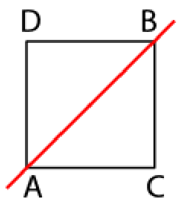


Figure 4

$ACBD$ est un carré.

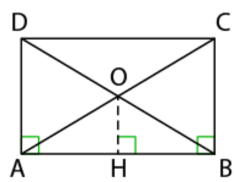


b) Par déduction, répondre par « Vrai » ou « Faux » selon le cas.

- **Figure 1** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ ....
- **Figure 2 :** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ ....
- **Figure 3 :** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ....
- **Figure 4 :** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$ ....

2 Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de centre O et H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

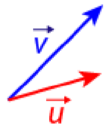
Dans chaque cas, compléter à l'aide d'une lettre de la figure.



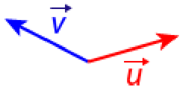
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times A\ldots$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = AB \times A\ldots$
- $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA} = -DC \times \ldots A$
- $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HD} = -HB \times H\ldots$
- $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BO} = BH \times \ldots H$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD} = -DA \times \ldots A$

Nom : ____ Classe : __________

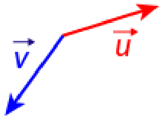
3 En utilisant une projection orthogonale, donner dans chaque cas, le signe du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en complétant à l'aide des symboles $>$ ou $<$.



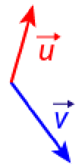
$\vec{u}.\vec{v} \dots 0$



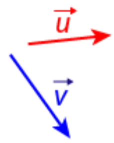
$\vec{u}.\vec{v} \dots 0$



$\vec{u}.\vec{v} \dots 0$

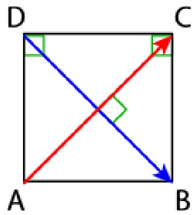


$\vec{u}.\vec{v} \dots 0$



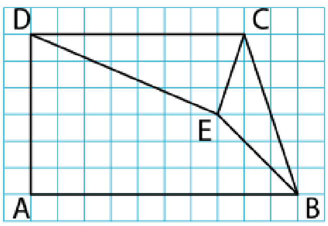
$\vec{u}.\vec{v} \dots 0$

4 ABCD est un carré de côté 3. Entourer et corriger les erreurs de Kéran, qui devait calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ en utilisant des projetés orthogonaux.



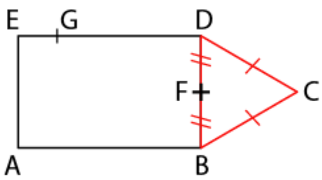
Production de Kéran	**Correction**
Le projeté orthogonal du point A sur (CD) est D.	....
Le projeté orthogonal du point C sur (CD) est C.	....
Le projeté orthogonal du point B sur (CD) est C.	....
Donc par projection orthogonale sur (CD), on a :	....
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC} = \mathrm{DC} \times \mathrm{DC} = 16.$	....

5 Sur le quadrillage ci-contre formé de carrés de côté 1, ABCD est un trapèze et E est un point à l'intérieur de ce trapèze. Calculer les produits scalaires à l'aide de projetés orthogonaux :



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}$

6 Sur la figure ci-contre ABDE est un rectangle tel que $\mathrm{AB} = 5$ et $\mathrm{AE} = 3$, DBC est un triangle équilatéral, F est le milieu de $[\mathrm{DB}]$ et G est un point du segment $[\mathrm{DE}]$. Calculer chaque produit scalaire à l'aide de projetés orthogonaux :



- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$
- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DB}$

Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 9 Parcours 2

Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec des coordonnées ?

Exemple : Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}(4\,;\,-2)$ et $\vec{v}(-1\,;\,-3)$. Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

On applique l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée :

si $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = x \times x' + y \times y'$.

$\vec{u}.\vec{v} = 4 \times (-1) + (-2) \times (-3) = -4 + 6 = 2$.

1 Dans un repère orthonormé, on donne trois vecteurs $\vec{u}(-3\,;\,-1)$, $\vec{v}(2\,;\,-1)$ et $\vec{w}(2\,;4)$. Pour chaque affirmation, vérifier mentalement sa justesse et écrire « Vrai » ou « Faux » selon le cas.

a) $\vec{u}.\vec{v} = -7$ .... **b)** $\vec{v}.\vec{w} = 0$ .... **c)** $\vec{u}.\vec{w}$ est négatif ....

d) $\vec{u}.\vec{w} = -\vec{w}.\vec{u}$ .... **e)** $\vec{u}.\vec{u} = 10$ ....

2 Dans un repère orthonormé, on donne les points $\mathrm{A}(-1\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;\,-5)$ et $\mathrm{C}(-4\,;\,-1)$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

....

....

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

....

....

3 Dans un repère orthonormé du plan, on donne les vecteurs $\vec{u}(-4\,;\,-6)$ et $\vec{v}(-9\,;7)$ ainsi que les points $\mathrm{A}(-2\,;3)$ et $\mathrm{B}(1\,;\,-9)$.

Calculer les produits scalaires : **a)** $\vec{u}.v$ **b)** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\vec{v}$

....

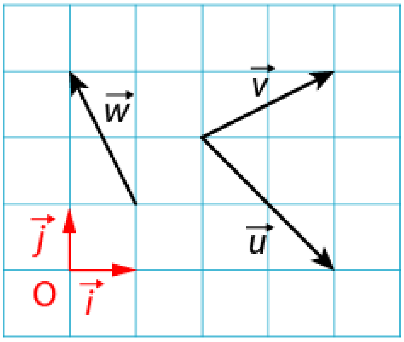
....

....

Nom : ____ Classe : _________

4 Dans le repère orthonormé ci-dessous, les carreaux du quadrillage sont des carrés de côté 1.

Calculer les produits scalaires : **a)** $\vec{u}.\vec{v}$ **b)** $\vec{u}.\vec{w}$ **c)** $\vec{v}.\vec{w}$



....

....

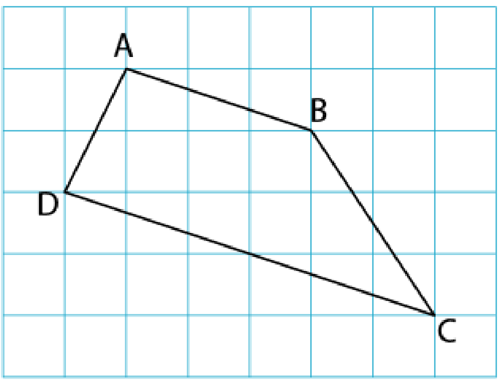
....

....

....

5 Les carreaux du quadrillage ci-dessous sont des carrés de côté 1 et ABCD est un trapèze. En introduisant un repère orthonormé, calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ **b)** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ **c)** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\overrightarrow{\mathrm{BA}}$



....

....

....

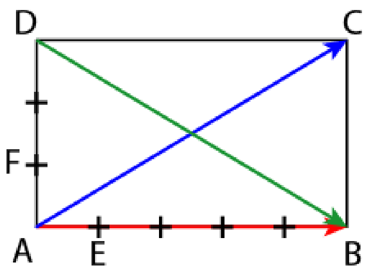
....

....

....

6 ABCD est un rectangle tel que $\mathrm{AB} = 5$ et $\mathrm{AD} = 3$. E est un point du segment $[\mathrm{AB}]$ tel que $\mathrm{AE} = 1$ et F est un point du segment $[\mathrm{AC}]$ tel que $\mathrm{AF} = 1$.

En introduisant un repère orthonormé, calculer les produits scalaires : **a)** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ **b)** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{DB}}$



....

....

....

....

....

Nom : ______________________________ Classe : __________

Chapitre 9 Parcours 3

Comment utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité ?

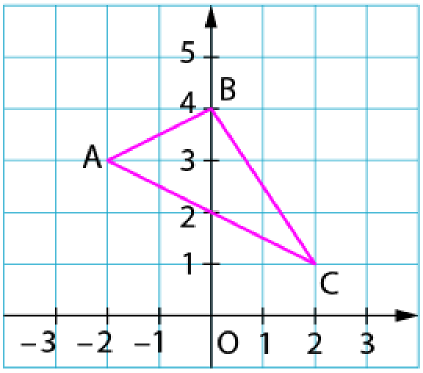
Exemple : Dans un repère orthonormé, on donne quatre points $A(-2\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(2\,;1)$ et $D(1\,;4)$. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On montre que le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ est égal à 0.

$\overrightarrow{AB}(4+2\,;3-1)$ soit $\overrightarrow{AB}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(1-2\,;4-1)$ soit $\overrightarrow{CD}(-1\,;3)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 6\times(-1)+2\times 3 = -6+6 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, d'où les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

1 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2\,;3)$, $B(0\,;4)$ et $C(2\,;1)$.



a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

c) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

2 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\,;5)$, $B(6\,;3)$, $C(7\,;6)$ et $D(3\,;0)$. Pour chaque affirmation, indiquer « Vrai » ou « Faux » selon le cas. Les calculs nécessaires aux réponses seront effectués dans le cadre ci-dessous.

a) (AB) et (DC) sont perpendiculaires. ....

b) Le triangle DBA est rectangle en B. ....

Nom : ______________________________ Classe : __________

3 Dans un repère orthonormé, on donne quatre points $A(-1\,;1)$, $B(1\,;\,2)$, $C(3\,;\,-2)$ et $D(1\,;\,-3)$.

a) Justifier que les trois produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$ sont nuls.

………

………

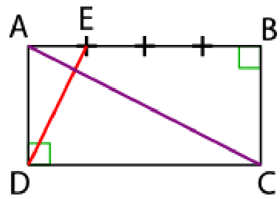
………

………

b) Que peut-on en déduire sur le quadrilatère $ABCD$?

………

4 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 1$. Gabriel souhaite montrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires. Il a commencé son raisonnement ci-dessous. Terminer son travail dans le cadre.

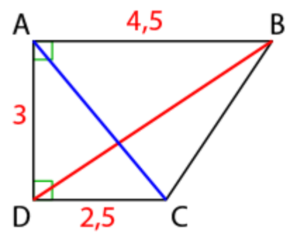


Je calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$ *en remarquant que* $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

5 $ABCD$ est un trapèze rectangle donné ci-contre.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ à l'aide des deux méthodes proposées.



1re méthode : en remarquant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ et que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.	**2e méthode : en introduisant un repère orthonormé d'origine A.**
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………
………………………………………………	………………………………………………

Nom : ______________________________ Classe : __________

b) Que peut-on conclure de la valeur de $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$?

....

....

6 $ABCD$ est un carré de côté 2. E est le milieu du côté $[CD]$ et F est le milieu du côté $[AD]$.

Montrer que les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires en calculant un produit scalaire.