1 Dénombrement. Récurrence

S'ENTRAÎNER

81 Une grille de mots croisés peut être vue comme un 16-uplet de l'ensemble $E = \{0\,;1\}$ où la présence du chiffre 1 indique que la case est noire.
Ainsi, la grille donnée en exemple correspond au 16-uplet :
$(1\,;1\,;0\,;0\,;1\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0\,;1\,;0\,;0\,;0\,;0\,;0)$.
Or le nombre d'éléments de E^{16} est égal à $2^{16} = 65\,536$.
Il existe donc 65 536 telles grilles de mots croisés différentes.

86 **a)** Lorsque $n = 2$, deux droites sécantes se coupent en un point. Il y a donc un point d'intersection.
Lorsque $n = 3$, les trois droites se coupent en trois points puisqu'elles ne sont pas concourantes. Il y a donc 3 points d'intersection.
Lorsque $n = 4$, trois droites quelconques ne sont pas concourantes donc la quatrième droite coupe en 3 points les trois premières droites. Il y a donc $3 + 3 = 6$ points d'intersection.
b) Trois droites quelconques ne sont pas concourantes donc la $(n+1)$-ième droite coupe en n points les n premières droites qui se coupent en u_n points. Il y a donc $u_n + n$ points d'intersection.
c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, P(n) est la propriété : « $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$.
La propriété P(2) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété P(k) est vraie c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{k(k-1)}{2}$ (hypothèse de récurrence).
Or $u_{k+1} = u_k + k$ donc $u_{k+1} = \dfrac{k(k-1)}{2} + k$.
Ainsi, $u_{k+1} = \dfrac{k(k-1)}{2} + \dfrac{2k}{2} = \dfrac{(k+1)k}{2}$.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété P(n) est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

99 **a)** La négation de cette affirmation est :
Il existe un entier naturel n tel que la propriété P(n) : « $n^2 - 2$ est positif » est fausse. Cette négation est vraie. En effet, pour $n = 1$, $1^2 - 2 = -1$ est négatif, donc P(1) est fausse.
b) La négation de cette affirmation est :
Pour tout entier naturel n, la propriété P(n) : « $n^3 - n$ est un multiple de 3 » est vraie. Cette négation est vraie. En effet, on le démontre par récurrence :
• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $0^3 - 0 = 0$ est un multiple de 3.
La propriété P(0) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $k^3 - k = 3p$ (hypothèse de récurrence).
Or $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$.
Donc $(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k - k$.
Ainsi $(k+1)^3 - (k+1) = 3p + 3k^2 + 3k$.
On en déduit que $(k+1)^3 - (k+1)$ est un multiple de 3.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété P(n) est vraie.

2 Combinatoire et dénombrement

S'ENTRAÎNER

61 **1.** Comme les maillots sont indiscernables, on ne tient pas compte de l'ordre. Dans cette situation, on calcule donc des nombres de combinaisons.
a) $\dbinom{12}{5} = 792$
b) $\dbinom{12}{12} = 1$ (il faut prendre tous les maillots).
2. Comme les maillots sont numérotés, on tient compte de l'ordre. Dans cette situation, on calcule donc des nombres de n-uplets d'éléments distincts.
a) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$
b) $12! = 479\,001\,600$.
3. Cette affirmation est vraie. Pour un seul maillot, il y a 12 façons de le choisir dans les deux cas. Pour cinq maillots, on a obtenu des résultats différents.

68 $A = \dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$

$B = \dfrac{(n-1)!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$C = \dfrac{n!}{(n-1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!} = n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2-1}{n}$

74 • Le nombre de façons de tirer les deux chaussures est $\dbinom{6}{2} = 15$.
Il y a trois tirages où les deux chaussures appartiennent à la même paire, par conséquent $P(A) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.
• Le nombre de tirages avec un pied droit et un pied gauche est $\dbinom{3}{1} \times \dbinom{3}{1} = 9$, par conséquent $P(B) = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

79 **a)** Si un ensemble a 8 éléments, alors **le nombre de permutations de cet ensemble est 8! = 40 320**.
b) Si n et n' sont deux nombres entiers naturels avec $n \leqslant n'$, alors **il y a moins de triplets d'un ensemble à *n* éléments que de triplets d'un ensemble à *n'* éléments**.
c) Si n et k sont deux nombres entiers naturels égaux, alors **le nombre de combinaisons de *k* éléments parmi *n* est égal à 1**.
d) Si n et m sont deux nombres entiers naturels tels que $n = 2m$ et si E et F sont des ensembles à n et m éléments respectivement, alors **le nombre de parties de l'ensemble E est égal au carré du nombre de parties de l'ensemble F**.

3 Vecteurs, droites et plans de l'espace

S'ENTRAÎNER

87 On cherche la décomposition des vecteurs sur la base $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$:
• $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{EG} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

• $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} = -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EK} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

On remarque donc que $\overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{EG}$: les vecteurs $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires et donc les points E, K et G sont alignés.

94 $\overrightarrow{AB}(4\,;-6\,;-2)$ et $\overrightarrow{AM}(2\,;a-4\,;b-5)$
Les points A, B et M sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ce qui se traduit par : $\begin{cases} 2(a-4) = -6 \\ 2(b-5) = -2 \end{cases}$ soit $a = 1$ et $b = 4$.

107 **a)** Cette implication est fausse.
b) Réciproque : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non coplanaires alors ils sont deux à deux non colinéaires. Cette implication est vraie.

4 Orthogonalité et distances dans l'espace

S'ENTRAÎNER

82 a) • $\overrightarrow{OA}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{OD}(2;\sqrt{2};\sqrt{2})$

Donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=2$.
D'autre part,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OD}\times\cos(\widehat{AOD}).$$

Or $\mathrm{OA}=1$ et $\mathrm{OD}=\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$.

Donc $2=1\times 2\sqrt{2}\times\cos(\widehat{AOD})$

d'où $\cos(\widehat{AOD})=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi une mesure de l'angle $\widehat{AOD}$ est $\dfrac{\pi}{4}$rad.

• $\overrightarrow{OB}(0;1;0)$

Donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\sqrt{2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\mathrm{OB}\times\mathrm{OD}\times\cos(\widehat{BOD})$.
Or $\mathrm{OB}=1$.

Donc $\sqrt{2}=1\times 2\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BOD})$

d'où $\cos(\widehat{BOD})=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi une mesure de l'angle $\widehat{BOD}$ est $\dfrac{\pi}{3}$rad.

• $\overrightarrow{OC}(0;0;1)$

Donc $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\sqrt{2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\mathrm{OC}\times\mathrm{OD}\times\cos(\widehat{COD})$.
Or $\mathrm{OC}=1$.

Donc $\sqrt{2}=1\times 2\sqrt{2}\times\cos(\widehat{COD})$

d'où $\cos(\widehat{COD})=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi une mesure de l'angle $\widehat{COD}$ est $\dfrac{\pi}{3}$rad.

88 Méthode 1 :

1. a) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BI}\cdot(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ})$

Donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{KJ}$.

b) Or $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{EJ}$ et F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (EJ) donc :

$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{EJ}$.

Ainsi $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AK}=-\mathrm{FI}\times\mathrm{EJ}=-\dfrac{1}{2}\times 2=-1$.

De plus, $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{BF}$ et F est le projeté orthogonal du point I sur la droite (BF) donc :

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BF}=\mathrm{BF}^2=1^2=1.$$

On en conclut que $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}=-1+1=0$.

c) $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{BI}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AJ})$

Donc $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.
Or la droite (DA) est orthogonale au plan (EAB), donc la droite (DA) est orthogonale à toute droite du plan (EAB).
En particulier, la droite (DA) est orthogonale à la droite (BI).

Ainsi $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ d'où $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0+0=0$.

2. $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{GI}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AJ})$

Donc $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

Or $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GF}^2=1$

De plus, $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{GI}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ})$

Donc $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{EJ}$.

On a également : $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ et $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{EJ}=-1$.

Ainsi $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{AJ}=0-1=-1$ et $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=1-1=0$.
Conclusion, la droite (DJ) est orthogonale à deux droites sécantes (BI) et (GI) du plan (BGI). La droite (DJ) est donc orthogonale au plan (BGI).

Méthode 2 :

1. a) On choisit le repère orthonormé

$$(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}).$$

b) $\overrightarrow{BI}\left(-\dfrac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ et $\overrightarrow{GI}\left(-\dfrac{1}{2};-1;0\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$ et $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$.
On en conclut que la droite (DJ) est orthogonale à deux droites sécantes (BI) et (GI) du plan (BGI). La droite (DJ) est donc orthogonale au plan (BGI).

93 1. a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{BA}^2+\mathrm{BD}^2-\mathrm{AD}^2)$.

Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(1^2+1^2-1^2)=\dfrac{1}{2}$.

De même $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$

Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

D'où $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Ainsi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

2. a) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}$

Or $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
De plus, la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD), donc la droite (AH) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (AH) est orthogonale à la droite (CD) d'où $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Ainsi $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0=0$.

b) • Dans le triangle BIC rectangle en I, on a : $\mathrm{BI}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{CI}^2$

d'où $\mathrm{BI}^2=1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ soit $\mathrm{BI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• La hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BCD est aussi médiatrice donc I est le milieu du segment [CD]. Ainsi la droite (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle (ACD), donc de même $\mathrm{AI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{BA}^2+\mathrm{BI}^2-\mathrm{AI}^2)$.

Donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}\left(1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)=\dfrac{1}{2}$.

c) H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BI). Ainsi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BI}$.

D'où $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=\mathrm{BH}\times\mathrm{BI}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BH}$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BH}$.

C'est-à-dire $\mathrm{BH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

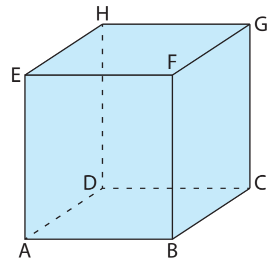
3. La distance du point A au plan (BCD) est AH.
Dans le triangle ABH rectangle en H,
$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2$

Ainsi $\mathrm{AH}^2=1^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{2}{3}$.

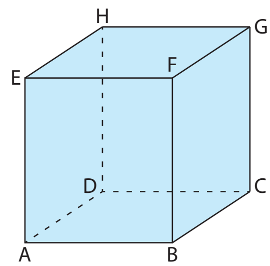
Soit $\mathrm{AH}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On en conclut que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

98 a) Contre-exemple :
ABCDEFGH est un cube. Les droites (BF) et (EH) sont orthogonales à la même droite (EF) mais elles ne sont pas parallèles.



b) Contre-exemple :
Il suffit de prendre une droite (AB) orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ avec B n'appartenant pas au plan $\mathscr{P}$.
c) Contre-exemple :
ABCDEFGH est un cube. La droite (GC) est contenue dans le plan (GCB).
Le point E n'appartient pas au plan (GCB).
La distance du point E au plan (GCB) est EF.
Mais les droites (GC) et (EG) sont orthogonales donc la distance du point E à la droite (GC) est GE.
Et la distance EF n'est pas égale à la distance EG.



5 Représentations paramétriques et équations cartésiennes

S'ENTRAÎNER

71 **a)** $I(-1\,;-1\,;4)$, $J(0\,;-3\,;4)$, $K(-3\,;0\,;5)$.

b) • On note Δ_A la médiane issue de A.

$A \in \Delta_A$ et $\overrightarrow{AK}(-5\,;4\,;2)$ est un vecteur directeur de Δ_A.

Donc Δ_A a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2-5t \\ y = -4+4t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

• On note Δ_B la médiane issue de B.

$B \in \Delta_B$ et $\overrightarrow{BJ}(4\,;-5\,;-1)$ est un vecteur directeur de Δ_B.

Donc Δ_B a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4+4t' \\ y = 2-5t' \\ z = 5-t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

• On note Δ_C la médiane issue de C.

$C \in \Delta_C$ et $\overrightarrow{CI}(1\,;1\,;-1)$ est un vecteur directeur de Δ_C.

Donc Δ_C a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2+t'' \\ y = -2+t'' \\ z = 5-t'' \end{cases} \quad (t'' \in \mathbb{R}).$$

c) • On résout le système :

$$\begin{cases} 2-5t = -4+4t' \\ -4+4t = 2-5t' \\ 3+2t = 5-t' \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 5t+4t' = 6 \\ 4t+5t' = 6 \\ 2t+t' = 2 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} t = \dfrac{2}{3} \\ t' = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

• On remplace t par $\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de Δ_A afin de déterminer les coordonnées de G.

$$\begin{cases} x = 2-5\times\dfrac{2}{3} \\ y = -4+4\times\dfrac{2}{3} \\ z = 3+2\times\dfrac{2}{3} \end{cases}. \text{ Ainsi } G\left(-\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{13}{3}\right).$$

• On vérifie que $G \in \Delta_C$.

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} = -2+t'' \\ -\dfrac{4}{3} = -2+t'' \\ \dfrac{13}{3} = 5-t'' \end{cases} \text{ ce qui est équivalent à } t'' = \dfrac{2}{3}.$$

Ainsi, $G \in \Delta_C$.

79 **a)** $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;-4)$, $\overrightarrow{AC}(1\,;-3\,;-4)$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si, et seulement si, $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ n\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire

$\begin{cases} -2a-4c = 0 \\ a-3b-4c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2a+4c = 0 \\ a-3b-4c = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 2a+4c = 0 \\ a-3b-4c = 0 \end{cases}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} a = -2c \\ 3b = a-4c \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2c \\ 3b = -2c-4c \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2c \end{cases}$.

d) Pour $c = 1$, $\vec{n}(-2\,;-2\,;1)$.

e) (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $-2x-2y+z+d = 0$. Or $A(2\,;4\,;1) \in (ABC)$, donc $-2\times2-2\times4+1+d = 0$ donc $-11+d = 0$ et $d = 11$.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$-2x-2y+z+11 = 0.$$

84 **a)** un point de d appartient à $\mathcal{P}$

b) $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

c) $K \in d$.

6 Limite des suites

S'ENTRAÎNER

69 **1. a)** Pour tout entier naturel n,
$$4(n-1)^2-3=4n^2-8n+4-3=u_n$$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=+\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}4(n-1)^2=+\infty$ (limite d'un produit) et

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ (limite d'une somme).

2. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,
$$u_n=4n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{4n^2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}4n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ (limite d'un produit).

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 2n^2$ équivaut à démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$, $2n^2-8n+1\geqslant 0$.

Les racines réelles du trinôme $2x^2-8x+1$ sont $x_1=2-0{,}5\sqrt{14}$ et $x_2=2+0{,}5\sqrt{14}$.

Le trinôme $2x^2-8x+1$ est positif sur $]x_2\,;+\infty[$ et $x_2\approx 3{,}88$ donc, pour tout entier $n\geqslant 4$, $2n^2-8n+1\geqslant 0$ et donc $u_n\geqslant 2n^2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n^2)=+\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

89 **a)** On tabule les suites (2^n) et (n^3) et on constate que le plus petit entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $2^n\geqslant n^3$ est $n=10$.

b) Pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $f(x)=x^3-3x^2-3x-1$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ en tant que fonction polynôme et
$$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1).$$
x^2-2x-1 possède deux racines réelles $x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$.

f est donc décroissante sur $[0\,;1+\sqrt{2}]$ et croissante sur $[1+\sqrt{2}\,;+\infty[$.

c) • **Initialisation** : $2^{10}=1\,024$ et $10^3=1\,000$ donc $2^{10}\geqslant 10^3$

• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel $k\geqslant 10$, $2^k\geqslant k^3$.

Alors $2^{k+1}\geqslant 2k^3$.

Or, la fonction f est croissante sur $[10\,;+\infty[$, donc $f(k)\geqslant f(10)$ c'est-à-dire $2k^3-(k+1)^3\geqslant 669$ ce qui implique que $2k^3\geqslant(k+1)^3$.

On en déduit donc que $2^{k+1}\geqslant(k+1)^3$.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n\geqslant 10$, $2^n\geqslant n^3$.

d) Pour tout entier naturel $n\geqslant 10$, $\dfrac{2^n}{n^2}\geqslant n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n^2}=+\infty$.

92 **a)** Pour tout entier naturel n, $n^2\leqslant n^2+4$ (car $0\leqslant 4$) et $n^2+4\leqslant n^2+4n+4$ (car $0\leqslant 4n$).

Ainsi, pour tout entier naturel n,
$$n^2\leqslant n^2+4\leqslant(n+2)^2.$$
b) La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on déduit de **a)** que pour tout entier naturel n, $n\leqslant\sqrt{n^2+4}\leqslant n+2$, soit pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $1\leqslant u_n\leqslant\dfrac{n+2}{n}$, c'est-à-dire $1\leqslant u_n\leqslant 1+\dfrac{2}{n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

97 **a)** L'affirmation est vraie. En effet, (u_n)converge donc $(2u_n)$ converge (produit) et (v_n) converge donc $(-3v_n)$ converge (produit), donc $(2u_n-3v_n)$ converge (somme).

b) L'affirmation est vraie. En effet, pour tout entier naturel n, $v_n=(u_n+v_n)-u_n$ donc la suite (v_n) converge (différence).

c) L'affirmation est fausse. En effet, si pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=\dfrac{1}{n^2}$ et $v_n=n$, alors (u_n) converge vers 0, (u_nv_n) converge vers 0 mais (v_n) diverge vers $+\infty$.

7 Compléments sur les suites

S'ENTRAÎNER

71 **1.** $m_{n+1}=0{,}9m_n$, donc la suite (m_n) est géométrique de raison 0,9.

Comme $-1<0{,}9<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}9^n=0$.

La limite de la suite (m_n) est 0.

2. a) $m_0=25\,000$ et la raison de la suite (m_n) est inférieure à 1, donc cette suite est décroissante.

Un jour, il restera moins de 1 kg de glace.

b)
```
from math import *

def Seuil(p):
    n=0
    m=25000
    while m>=1:
        n=n+1
        m=0.9*m
    return n,m
```
On obtient :
```
>>> Seuil(1)
(97, 0.9108847355139755)
```
Il restera moins d'un kilogramme de glace au bout de 97 jours.

78 **a)** $u_1=\dfrac{1}{16}$ et $u_2=\dfrac{1}{256}$.

b) Initialisation : $u_0=\dfrac{1}{4}$, $u_1=\dfrac{1}{16}$.

Donc $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 1$.

Hérédité : on suppose que pour un nombre entier naturel k, $0\leqslant u_{k+1}\leqslant u_0\leqslant 1$.

On démontre alors que $0\leqslant u_{k+2}\leqslant u_{k+1}\leqslant 1$.

De l'hypothèse de récurrence et comme la fonction carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, alors $0\leqslant {u_{k+1}}^2\leqslant {u_k}^2\leqslant 1$ soit $0\leqslant u_{k+2}\leqslant u_{k+1}\leqslant 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

86 **a) Faux**. En effet, si $u_n=\dfrac{1}{n}$ alors $v_n=-2n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$.

b) Vrai. En effet, pour tout entier naturel n, $2\leqslant u_n$ donc $\dfrac{1}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-2}{u_n}\leqslant -1$ c'est-à-dire $v_n\geqslant -1$.

c) Faux. En effet, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante et $v_n=\dfrac{-2}{\frac{1}{n}}=-2n$ est également décroissante.

d) Faux. En effet, $u_n=(-1)^n$ est divergente et $v_n=\dfrac{-2}{(-1)^n}=-2(-1)^{-n}$ est également divergente.

8 Limites des fonctions

S'ENTRAÎNER

85 **a)** $g(k\pi) = (k\pi)^4 \times \sin(k\pi) = 0$.
b) A est un nombre réel, $A > 0$.
Il n'existe pas de réel $x_0 > 0$ tel que pour tout réel $x > x_0$, $g(x) > A$.
En effet, il existe un entier naturel k tel que $k\pi > x_0$ (il suffit que $k \geqslant E\left(\frac{x_0}{\pi}\right)$) et alors $g(k\pi) = 0$ soit $g(k\pi) < A$.
Donc la fonction g ne peut avoir pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

103 **1. a)** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $e^{-x} > 0$ donc $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\sin(x) \leqslant e^{-x}$ c'est-à-dire $-e^{-x} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
b) La droite d d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.
c) Pour tout entier relatif k, $g(k\pi) = 0$.
Donc $\mathscr{C}$ coupe la droite d aux points de coordonnées $(k\pi\,;0)$.
2. A est un nombre réel, $A > 0$.
Il n'existe pas de réel $x_0 < 0$ tel que pour tout réel $x < x_0$, $g(x) > A$.
En effet, il existe un entier relatif $k < 0$ tel que $k\pi < x_0$ (il suffit que $k \leqslant E\left(\frac{x_0}{\pi}\right)$) et alors $g(k\pi) = 0$ soit $g(k\pi) < A$.
Donc la limite de la fonction g en $-\infty$ ne peut pas être $+\infty$.

111 **a)** Pour $x > 0$, $0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
L'affirmation est vraie.
b) On pose pour $x > 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, alors $f(x) = xg(x)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et l'affirmation est vraie.

9 Compléments sur la dérivation

S'ENTRAÎNER

75 **1. a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,
$$g'(t) = e^t + 1 \times e^t + t \times e^t = (2+t)e^t.$$
b) Pour tout réel t, $e^t > 0$, $g'(t)$ est donc du signe de $2 + t$.
On obtient le tableau suivant :

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

La fonction g admet donc un minimum en $t = -2$.
c) $g(-2) \approx 0{,}9$, on en déduit que pour tout réel t, $g(t) \geqslant g(-2) > 0$.
2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $t \neq 0$,
$$f'(t) = \frac{1 \times \left(1 + e^{\frac{1}{t}}\right) - t \times \frac{-1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{t}}\right)^2}$$
$$f'(t) = \frac{1 + e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{t}}\right)^2} = \frac{g\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(1 + e^{\frac{1}{t}}\right)^2}$$
b) Pour tout réel $t \neq 0$, $f'(t)$ est du signe de $g\left(\frac{1}{t}\right)$.
Or, d'après **a)**, pour tout réel $t \neq 0$, $g\left(\frac{1}{t}\right) > 0$ donc $f'(t) > 0$. Donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

80 **1. a)** La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = -2e^{-2x+1} + 2$
$f''(x) = 4e^{-2x+1}$
Pour tout réel x, $f''(x) > 0$, la fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc une équation de cette tangente est $y = 0\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0$, soit $y = 0$.
2. a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier au-dessus de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.
b) $f'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^{-2x+1} \leqslant \frac{-2}{-2}$, soit $-2x + 1 \leqslant \ln(1)$ ou encore $x \geqslant \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

La fonction f admet un minimum égal à 0 sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.

82 **a)** f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$ et $g(x) = -x + 1$.
Ces deux fonctions sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.
La composée $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+1) = -2(-x+1)$.
Soit $(f \circ g)(x) = 2x - 2$.
La fonction $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction cube change de convexité en 0, elle n'est pas convexe sur l'intervalle $[-1\,;1]$ et n'est pas non plus concave sur cet intervalle.

10 Continuité des fonctions d'une variable réelle

S'ENTRAÎNER

67 • La fonction $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]-\infty\,;-1[$, la fonction $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]-1\,;3[$ et la fonction $x \mapsto x^3 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]3\,;+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} k(x) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} k(x) = -a + b$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} k(x) = 3a + b$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} k(x) = 26$.

La fonction k est continue en -1 et en 3 si, et seulement si, $\begin{cases} -a + b = 4 \\ 3a + b = 26 \end{cases}$.

Par soustraction membre à membre, on obtient $4a = 22$, c'est-à-dire $a = \dfrac{11}{2}$.

En remplaçant a par cette valeur dans la 1re équation, on obtient $b = \dfrac{19}{2}$.

• Donc, la fonction k est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement $a = \dfrac{11}{2}$ et $b = \dfrac{19}{2}$.

70 **1. a)** La fonction f définie sur $\left[-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ convient.

b) • On place v_0 sur l'axe des abscisses.

(1) On utilise la courbe de f pour placer $v_1 = f(v_0)$ sur l'axe des ordonnées.

(2) On utilise la droite d'équation $y = x$ pour reporter v_1 sur l'axe des abscisses.

• On recommence les étapes **(1)** et **(2)** à partir de v_1 pour placer v_2 sur l'axe des abscisses.

• On recommence les étapes **(1)** et **(2)** à partir de v_2 pour placer v_3 sur l'axe des abscisses.

2. a) Il semble que la suite (v_n) est croissante et qu'elle admet 4 pour majorant.

b) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

Initialisation : $v_0 = 0$ et $v_1 = 2$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant 4$.

On démontre qu'alors $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$.

De l'hypothèse de récurrence on déduit que $4 \leqslant 3v_k + 4 \leqslant 3v_{k+1} + 4 \leqslant 16$.

Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc

$$2 \leqslant \sqrt{3v_k + 4} \leqslant \sqrt{3v_{k+1} + 4} \leqslant 4,$$

c'est-à-dire $2 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$ et par conséquent $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4.$$

Autrement dit, la suite (v_n) est croissante et majorée par 4.

3. La suite (v_n) est croissante et majorée par 4, donc elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$ donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Dans I, l'équation est équivalente à l'équation $\sqrt{3x + 4} = x$, c'est-à-dire $3x + 4 = x^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$), soit $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Or, $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

Dans $[0\,;4]$, la seule solution de cette équation est 4, donc la suite (v_n) converge vers $\ell = 4$.

76 **1. a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}$.

Pour tout réel x, $g'(x) > 0$, donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

Or, $7 \in]1\,;+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 7$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$.

b) $g(0) = \sqrt{2}$ et $g(5) = \sqrt{1 + e^5}$ soit $g(5) \approx 12{,}2$.

Or, $7 \in \left]\sqrt{2}\,;\sqrt{1 + e^5}\right[$ donc $0 < x_0 < 5$.

2. a) Ce programme renvoie l'arrondi avec p chiffres après la virgule d'une valeur approchée par excès à 10^{-p} près de x_0.

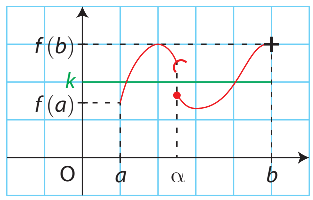
Voici l'affichage obtenu.

```
>>>
3.871202
```

Donc $3{,}871\,201 < x_0 < 3{,}871\,202$.

80 **a)** Si pour tous réels a et b d'un intervalle I avec $a < b$ et si pour tout $k \in]f(a)\,;f(b)[$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c \in]a\,;b[$, alors la fonction f est continue sur I.

b) La fonction représentée respecte les hypothèses de la réciproque, mais cette fonction est discontinue en α de $]a\,;b[$.



Fonction logarithme

S'ENTRAÎNER

115 Les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

c'est-à-dire $\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)$

soit $\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{\ln(ab)}{2}\right)$.

Les coordonnées de N sont $\left(\dfrac{a+b}{2}; 0\right)$. Donc $\mathrm{MN} = \dfrac{1}{2}\ln(ab)$ c'est-à-dire $\mathrm{MN} = \ln(\sqrt{ab})$.

123 **a)** Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x+1)$ on utilise le schéma de composition ci-contre.

$$x \longmapsto \underbrace{3x+1}_{\mathrm{X}} \qquad \mathrm{X} \longmapsto \ln(\mathrm{X})$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \ln(\mathrm{X}) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x+1) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-5) = +\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) • La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$: $g'(x) = \dfrac{3}{3x+1} + 1$ c'est-à-dire $g'(x) = \dfrac{3x+4}{3x+1}$.

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $3x+4 > 0$ et $3x+1 > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-5 ↗	$+\infty$

c) Le tableau de variations de g et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; +\infty[$.

$g(2) = \ln(7) - 3$ et $\ln(7) - 3 \approx -1{,}05$ donc $g(2) < 0$.

$g(3) = \ln(10) - 2$ et $\ln(10) - 2 \approx 0{,}3$ donc $g(3) > 0$.

$g(2) < 0$ et $g(3) > 0$ donc $2 < \alpha < 3$.

d) En tabulant avec la calculatrice on obtient : $2{,}76 < \alpha < 2{,}77$.

2.76	-0.01213845
2.77	0.001889891

129 **1. a)** $\log(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$;

$\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$;

$\log(0{,}1) = \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln(10)} = \dfrac{-\ln(10)}{\ln(10)} = -1$;

$\log(10^n) = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$;

b) • $\log(ab) = \dfrac{\ln(ab)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)} + \dfrac{\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

• $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln(a)-\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)} - \dfrac{\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

2. a) la fonction log est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$\log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}.$$

$\ln(10)$ est positif donc pour tout réel $x > 0$, $\log'(x) > 0$.

La fonction log est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Voici le tableau de variations de la fonction log.

x	0	$+\infty$
$\log'(x)$	‖ $+$	
$\log(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

b) • Une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1 est de la forme

$$y = \log'(1)(x-1) + \log(1).$$

Or, $\log'(1) = \dfrac{1}{\ln(10)}$ et $\log(1) = 0$.

Une équation de T est $y = \dfrac{1}{\ln(10)}(x-1)$.

• Une équation de la tangente T′ à la courbe au point d'abscisse 10 est de la forme

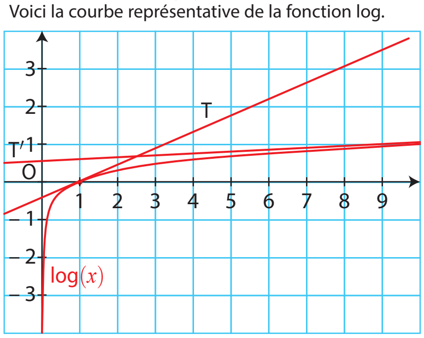
$$y = \log'(10)(x-10) + \log(10).$$

Or, $\log'(10) = \dfrac{1}{10\ln(10)}$ et $\log(10) = 1$.

Une équation de T′ est $y = \dfrac{1}{10\ln(10)}(x-10) + 1$

c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{10\ln(10)}(x-10) + 1$.

Voici la courbe représentative de la fonction log.



135 **a) Faux.** En effet, si $x > \mathrm{e}^{100}$ alors $\ln(x) > 100$.

b) Vrai. En effet, la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$ avec $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Or $f(1) = 1$ donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 1$ soit $x - \ln(x) \geqslant 1$.

On a alors pour tout réel $x > 0$, $x - \ln(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant x$.

c) Vrai. En effet, pour $x > 0$, $\ln(x) = -100$ équivaut à $x = \mathrm{e}^{-100}$.

d) Vrai. En effet, la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc l'inéquation $\ln(x) \geqslant 10^{10}$ équivaut à $x \geqslant \mathrm{e}^{10^{10}}$. On pouvait aussi justifier cette affirmation par le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

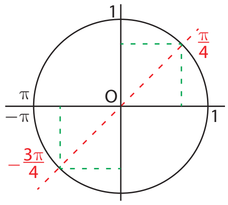
12 Fonctions sinus et cosinus

S'ENTRAÎNER

74 **1. a)** Pour tout réel x,
$g(x+\pi)=\sin(x+\pi)\cos(x+\pi)$
$g(x+\pi)=-\sin(x)\times(-\cos(x))=\sin(x)\cos(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(x+\pi)=g(x)$ donc la fonction g est périodique de période π.
b) Pour tout réel x, $g(-x)=\sin(-x)\cos(-x)$.
Or, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.
Donc, pour tout réel x, $g(-x)=-\sin(x)\times\cos(x)$ soit $g(-x)=-g(x)$. La fonction g est donc impaire.
2. a) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
On pose $u(x)=\sin(x)$ et $v(x)=\cos(x)$.
Alors, $u'(x)=\cos(x)$ et $v'(x)=-\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,
$g'(x)=\cos(x)\times\cos(x)+(\sin(x)\times(-\sin(x))$
$g'(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$.
Or, pour tout réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
donc $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$.
$g'(x)=\cos^2(x)-(1-\cos^2(x))$
$g'(x)=2\cos^2(x)-1$.
$g'(x)=(\sqrt{2}\cos(x)+1)(\sqrt{2}\cos(x)-1)$.
Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donc $\sqrt{2}\cos(x)+1\geqslant 1$.
$g'(x)$ est donc du signe de $\sqrt{2}\cos(x)-1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
Dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x)-1\geqslant 0$ équivaut à $\cos(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; ainsi, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.
Dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $\sqrt{2}\cos(x)-1\leqslant 0$ équivaut à $\cos(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; ainsi, $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, la fonction g est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
b) Pour dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, on utilise la réponse à la question **a)** et le fait que la fonction g est impaire et périodique de période π (question **1.**).

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
$g(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

78 **a)** On cherche des points du cercle trigonométrique qui sont aussi situés sur la première bissectrice.



Donc, dans $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\sin(x)=\cos(x)$ a deux solutions $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right\}$.
b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, l'inéquation $\cos(x)>\sin(x)$ équivaut à $-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

82 **a)** Si x_0 est solution de **(E)**, alors $\sin(x_0)=\frac{x_0}{2}$, c'est-à-dire $2\sin(x_0)=x_0$.
Or, pour tout réel x, $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$
donc $-2\leqslant 2\sin(x)\leqslant 2$.
Ainsi, $-2\leqslant 2\sin(x_0)\leqslant 2$, c'est-à-dire $-2\leqslant x_0\leqslant 2$ soit $x_0\in[-2\,;2]$.
b) Si x_0 est solution de **(E)**, alors $\sin(x_0)=\frac{x_0}{2}$.
Or, $\sin(-x_0)=-\sin(x_0)$ car la fonction sinus est impaire ; or, $-\sin(x_0)=-\frac{x_0}{2}=\frac{-x_0}{2}$, donc $\sin(-x_0)=\frac{-x_0}{2}$. Ainsi, $-x_0$ est solution de **(E)**.

13 Primitives, équations différentielles

98 **a)** Pour tout réel x de $]-1\,;0[$,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+x)^2}{x(1+x)^2}+\frac{bx(1+x)}{x(1+x)^2}+\frac{cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+x)^2+bx(1+x)+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+2x+x^2)+b(x+x^2)+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

b) Pour tout réel x de $]-1\,;0[$,
$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}$$
si, et seulement si, pour tout réel x de $]-1\,;0[$,
$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$
c'est-à-dire $\begin{cases} a+b &= 0\\ 2a+b+c &= 0\\ a &= 1\end{cases}$, soit $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.
Ainsi, pour tout réel x de $]-1\,;0[$,
$$g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$$
c) Sur $]-1\,;0[$, $x<0$ donc $-x>0$, ainsi une primitive sur $]-1\,;0[$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ soit $x\mapsto\frac{-1}{-x}$ est la fonction $x\mapsto\ln(-x)$.
Donc une primitive sur $]-1\,;0[$ de g est définie par $G(x)=\ln(-x)-\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}$.
L'ensemble des primitives sur $]-1\,;0[$ de la fonction g est donc constitué des fonctions
$x\mapsto\ln(-x)-\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}+C$ définies sur $]-1\,;0[$ où C est une constante réelle.

108 **1. a)** La fonction v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $4y'+24y=4\times 9{,}8$ soit $y'=-6y+9{,}8$.
b) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-6y+9{,}8$ sont les fonctions
$t\mapsto ke^{-6t}-\frac{9{,}8}{-6}$ soit $t\mapsto ke^{-6t}+\frac{9{,}8}{6}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.
2. a) v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-6y+9{,}8$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t\geqslant 0$,
$$v(t)=ke^{-6t}+\frac{9{,}8}{6}.$$
Or, $v(0)=0$, ainsi $ke^{-6\times 0}+\frac{9{,}8}{6}=0$.
Donc $k+\frac{9{,}8}{6}=0$, soit $k=-\frac{9{,}8}{6}$.
On en déduit que pour tout réel $t\geqslant 0$,
$$v(t)=-\frac{9{,}8}{6}\mathrm{e}^{-6t}+\frac{9{,}8}{6}=\frac{9{,}8}{6}(1-\mathrm{e}^{-6t}).$$
b) $v(20)=\frac{9{,}8}{6}(1-\mathrm{e}^{-6\times 20})$ soit $v(20)\approx 1{,}6$.
La vitesse du corps après 20 s est environ égale à 1,6 m.s^{-1}.

14 Calcul intégral

S'ENTRAÎNER

83 **1. a)** Pour tout réel $x \neq 1$,

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$$
$$= \frac{-ax^3 + (a-b)x^2 + (b-c)x + c + d}{1-x}$$

Le système :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -6 \\ b - c = 1 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 4 \\ d = -4 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$,

$$f(x) = -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}.$$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 4\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = -4\ln(2) + \frac{31}{12}$$

2. Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, , on pose :

$u(x) = \ln(1-x)$ $\qquad u'(t) = \dfrac{-1}{1-x}$

$v'(x) = 3x^2 - 12x + 1$ $\quad v(x) = x^3 - 6x^2 + x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\mathrm{I} = \left[(x^3 - 6x^2 + x)\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$- \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}\mathrm{d}x$$

$\mathrm{I} = \dfrac{7}{8}\ln(2) + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ et d'après la question **1**.

$$\mathrm{I} = \frac{7}{8}\ln(2) - 4\ln(2) + \frac{31}{12} = \frac{31}{12} - \frac{25}{8}\ln(2).$$

90 **1. a)** Pour tout réel x, $f(x) = g(x)$ équivaut à $4 - x^2 = 1 - \dfrac{1}{4}x^2$, soit $x^2 = 4$, c'est-à-dire $x = -2$ ou $x = 2$.

Les points d'intersection de C_f et C_g sont $A(-2\,;0)$ et $B(2\,;0)$.

b) Pour tout réel x de $[-2\,;2]$,

$$f(x) - g(x) = \left(4 - x^2\right) - \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$$

$$f(x) - g(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}(4 - x^2)$$

$4 - x^2 \geqslant 0$ donc $g(x) \leqslant f(x)$.

2. $\mathrm{A} = \displaystyle\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

$$\mathrm{A} = \frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right)\right) = 8 \text{ donc } \mathrm{A} = 8\,u.a.$$

94 **a)** Pour tout réel t,

$1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, donc $1 - \dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.

$$\frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2) = \frac{t^4}{1+t^2},$$

donc $\dfrac{1}{1+t^2} - (1 - t^2) \geqslant 0$ et $1 - t^2 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

b) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^1 (1 - t^2)\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{I} \leqslant \int_0^1 1\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 \text{ et } \int_0^1 (1 - t^2)\mathrm{d}t = \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

donc $\dfrac{2}{3} \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1$.

c) Avec la calculatrice :

$$\int_0^1 1 \div (1 + x^2)\,dx$$
$$\frac{1}{4}\pi$$

101 **a)** f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$ par $f(x) = x^2$.

Sa valeur moyenne sur I est :

$$\mu = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

D'autre part $\dfrac{f(0) + f(1)}{2} = \dfrac{1}{2}$,

donc, $\mu \neq \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$.

b) f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Sa valeur moyenne sur I est :

$$\mu = \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

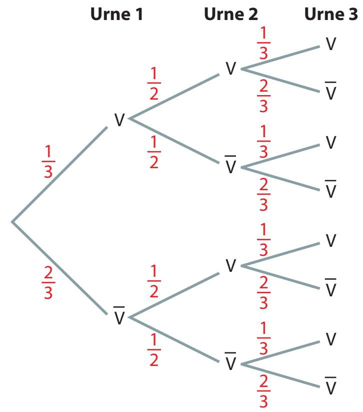
D'autre part $f\left(\dfrac{0+1}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$, donc $\mu \neq f\left(\dfrac{0+1}{2}\right)$.

15 Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli

S'ENTRAÎNER

53 **Situation 1**

a)



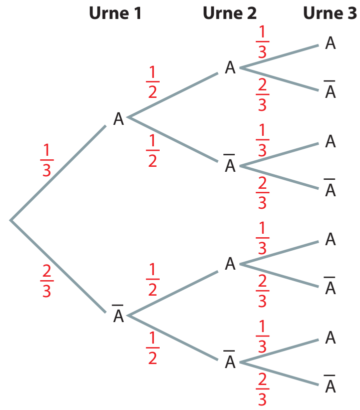
b) $p = 1 - P(\overline{V}\,;\overline{V}\,;\overline{V}) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$

$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

La probabilité de tirer au moins une boule verte est égale à $\frac{7}{9}$.

Situation 2

a)



b) $p' = P(\overline{A}\,;\overline{A}\,;\overline{A}) + P(A\,;\overline{A}\,;\overline{A}) + P(\overline{A}\,;A\,;\overline{A}) + P(\overline{A}\,;\overline{A}; A)$

$p' = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$p' = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

La probabilité d'obtenir A une fois au plus est égale à $\frac{2}{3}$.

61 **a)** On sait que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, donc $p_3 + p_2 + p_3 + p_2 + p_3 + p_2 = 1$. Or, $p_2 = 2p_3$ donc $9p_3 = 1$ et $p_3 = \frac{1}{9}$. Ainsi, $p_2 = \frac{2}{9}$.

Conclusion : $p_1 = p_3 = p_5 = \frac{1}{9}$ et $p_2 = p_4 = p_6 = \frac{2}{9}$.

b) Épreuve de Bernoulli : lancer le dé et on prend pour succès S : « Le résultat est pair ».

$$P(S) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{3}.$$

Schéma de Bernoulli : on répète n fois cette épreuve dans des conditions d'indépendance.

Loi binomiale : la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\frac{2}{3}\right)$.

Ainsi, $q_n = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$q_n > 0{,}999$ équivaut à $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0{,}999$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0{,}001$.

Ainsi $q_n > 0{,}999$ équivaut à $n\ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(0{,}001)$ c'est-à-dire $n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$, soit $n \geqslant 7$.

63 **a)** « Ne pas obtenir de succès »

b) « Obtenir au moins trois succès »

c) « Obtenir au moins deux succès »

16 Sommes de variables aléatoires

S'ENTRAÎNER

58 **a)**

A \ N	20	30	40	50	60	Total
40	1	2	0	1	0	**4**
50	3	4	5	3	2	**17**
60	3	4	2	6	5	**20**
70	2	1	3	2	1	**9**
Total	**9**	**11**	**10**	**12**	**8**	**50**

Voici la loi de probabilité de X :

a	40	50	60	70
$P(X = a)$	$\frac{4}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{9}{50}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	20	30	40	50	60
$P(Y = b)$	$\frac{9}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{8}{50}$

$E(X) = 56{,}8$ et $E(Y) = 39{,}8$

b) $E(Z) = E(X) + E(Y) = 96{,}6$

63 **1.** $E(X) = 3{,}79$ et $\sigma(X) \approx 1{,}34$.

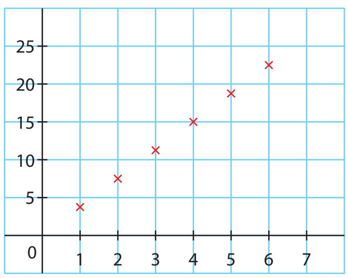
2. On peut considérer une playlist de 20 morceaux comme un échantillon de taille $n = 20$ de la loi de probabilité de X.

La durée totale d'une telle playlist est alors donnée par la variable aléatoire somme S_{20}.

$E(S_{20}) = 20E(X) = 75{,}8$ et $\sigma(S_{20}) = \sqrt{20}\,\sigma(X)$ donc $\sigma(S_{20}) \approx 6$.

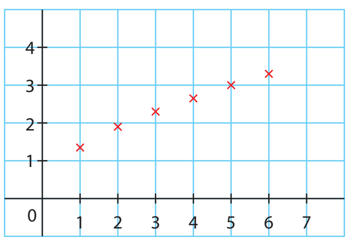
3. a) $E(S_n) = nE(X)$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X)$.

b)



Il s'agit d'une relation linéaire.

c)



Il s'agit d'une relation quadratique, les points sont sur une courbe qui rappelle celle de la fonction racine carrée.

70 **a)** Si X est une loi binomiale de paramètres n et p, alors X prend toutes les valeurs de 0 à n.

Alors 2X prend comme valeurs uniquement les nombres entiers pairs entre 0 et $2n$. Elle ne suit donc pas une loi binomiale.

b) L'écart-type de la somme S_n de l'échantillon est $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X)$. Il est donc bien modifié quand on augmente la taille n de l'échantillon.

c) L'écart-type de la moyenne M_n de l'échantillon est $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$. Quand on augmente la taille n de l'échantillon, la valeur de $\sqrt{n}$ augmente, et donc la valeur de $\sigma(M_n)$ diminue.

17 Concentration. Loi des grands nombres

S'ENTRAÎNER

27 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}1$.

b) L'espérance de X est $0{,}1 \times n$ et sa variance est $n \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09 \times n$.

2. a) X donne le nombre de fois où le chiffre 5 apparaît donc $F = \frac{X}{n}$ donne sa fréquence d'apparition.

b) L'espérance de F est :

$$\frac{1}{n} \times 0{,}1 \times n = 0{,}1.$$

c) La variance de F est :

$$\frac{1}{n^2} \times 0{,}09 \times n = \frac{0{,}09}{n}.$$

d) Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, la variance de F prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

3. a) Pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|F - 0{,}1| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}09}{n\delta^2}.$$

b) Pour $\delta = 0{,}05$, on obtient :

$$P(|F - 0{,}1| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{36}{n}$$

et avec l'événement contraire :

$$P(|F - 0{,}1| < 0{,}05) \geqslant 1 - \frac{36}{n},$$

soit $P(0{,}05 < F < 0{,}15) \geqslant 1 - \frac{36}{n}$.

c) On cherche n tel que $1 - \frac{36}{n} \geqslant 0{,}9$, c'est-à-dire $n \geqslant 360$.

30 • Pour tout réel $t > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant t) \leqslant \frac{V}{t^2}$ où V est la variance de X.

Il existe un réel $t > 0$ tel que $\frac{V}{t^2} \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire $t^2 \geqslant \frac{V}{0{,}01}$, soit $t \geqslant \frac{\sqrt{V}}{0{,}1}$. .

La proposition P est vraie.

• On prend un réel $t > \sqrt{\frac{V}{0{,}5}}$, alors $t^2 > \frac{V}{0{,}5}$, donc $0{,}5 > \frac{V}{t^2}$ et $1 - \frac{V}{t^2} > 0{,}5$.

Alors $P(|X - \mu| < t) \geqslant 1 - \frac{V}{t^2} > 0{,}5$.

La proposition Q est fausse.